Lista de exercícios 6
Cálculo I — 2025.1

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega: sexta-feira 16 de maio de 2025

1. Seja $x = \cos t$. Verifique que $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + x = 0$.
2. Seja $y = e^x \cos x$. Verifique que $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0$.
3. Através de derivação implícita, mostre que:
   (a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\operatorname{arcsen} x] = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   (b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\arccos x] = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
   (c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\arctan x] = \dfrac{1}{x^2+1}$
4. A função $y = f(x)$ é dada implicitamente pela equação $xy + 3 = 2x$. Mostre que $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - y$. Calcule $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}$.
5. Determine a equação da reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no ponto x_0, y_0, com $y_0 \neq 0$.
6. Seja $A = l^2$, $l > 0$.
   (a) Calcule a diferencial $\mathrm{d}A$.
   (b) Interprete geometricamente o erro que se comete na aproximação de ΔA por $\mathrm{d}A$ se A for a área de um quadrado de lado l.
7. Quando o sangue flui por uma artéria, o fluxo F (volume de sangue que passa por um ponto por unidade de tempo) é proporcional à quarta potência do raio R do vaso sanguíneo:

   $$F = kR^4.$$

   Uma artéria parcialmente obstruída pode ser expandida através de uma cirurgia chamada angioplastia, em que um balão na ponta de um catéter é inflado na artéria para alargá-la e restabelecer o fluxo sanguíneo normal. Mostre que a variação relativa do fluxo $\left(\frac{\Delta F}{D}\right)$ é quatro vezes a variação relativa do raio $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)$. Como um aumento de 5 % no raio da artéria afeta o fluxo sanguíneo?
8. A lei dos gases ideais associa a temperatura absoluta T (em kelvins), a pressão p (em atmosferas) e o volume V (em litros) de n mols de um gás ideal através da equação $pV = nRT$, com $R = 0{,}0821\,\mathrm{atm} \times \mathrm{L/mol/K}$ a constante universal dos gases ideais.

   Suponha que em certo instante, $p = 8{,}0\,\mathrm{atm}$ e aumenta a uma taxa constante de $0{,}10\,\mathrm{atm/min}$ e $V = 10\,\mathrm{L}$, aumentando à taxa constante de $0{,}15\,\mathrm{L/min}$. Obtenha a taxa de variação da temperatura T em função do tempo para $n = 10\,\mathrm{mol}$ de gás.

9. A posição de uma partícula que se desloca ao longo do eixo x depende do tempo de acordo com a equação $x = -t^3 + 3t^2$, $t \geqslant 0$.

   (a) Estude os sinais de $v(t)$.

   (b) Estude os sinais de $a(t)$.

   (c) Calcule $\lim_{t \to +\infty} (-t^3 + 3t)$

   (d) Esboce o gráfico da função $x = -t^3 + 3t^2$, $t \geqslant 0$.

10. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade e pontos de inflexão e esboce os gráficos das funções abaixo, calculando os limites necessários:

    (a) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2$

    (b) $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

    (c) $f(x) = xe^x$

    (d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

    (e) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

11. Quando um corpo estranho alojado na traqueia força uma pessoa a tossir, o diafragma dá um impulso para cima, causando um aumento de pressão nos pulmões. Isto é acompanhado por uma contração da traqueia, que cria um canal mais estreito para o ar expelido fluir.

    Em um canal estreito, para que uma dada quantidade de ar escape em certo intervalo de tempo, o ar deve se mover mais rápido, comparado com um canal mais largo. Quanto maior a velocidade do fluxo de ar, maior a força sobre o corpo estranho.

    Exames de raios X mostram que o raio do tubo traqueal, circular, se contrai para cerca de dois terços do normal durante a tosse.

    De acordo com o modelo matemático da tosse, a velocidade v do fluxo de ar está relacionada ao raio r da traqueia pela equação

    $$v(r) = k(r_0 - r)r^2; \qquad \frac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0,$$

    onde k é uma constante e r_0 é o raio da traqueia relaxada. A restrição nos valores de r se deve ao fato de que a parede traqueal se enrijece sob pressão e evita uma contração maior que $\frac{1}{2}r_0$, que sufocaria a pessoa.

    (a) Determine o valor de r no intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ em que v tem um máximo global. Como isso se compara com a evidência experimental obtida pelos raios X?

    (b) Qual é o valor máximo de v nesse intervalo?

    (c) Esboce o gráfico de v nesse intervalo.