

# Lista de exercícios 0

## Cálculo I

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

2025.1

1. Uma caixa d'água é formada por uma casca cilíndrica de concreto como na Figura 1. Utilizando a fórmula para o volume de um cilindro, explique por que o volume da casca é

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h.$$

Fatore essa expressão para mostrar que

$$V = 2\pi \cdot \text{raio médio} \cdot \text{altura} \cdot \text{espessura},$$

determinando as expressões para o que seria o raio médio desse cilindro e sua espessura. Use o diagrama “desenrolado” para explicar por que essa expressão faz sentido geometricamente.

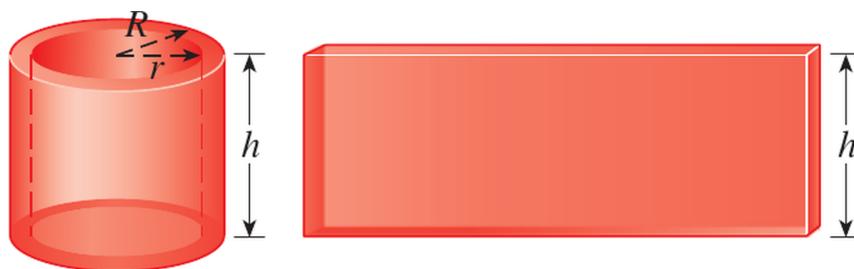


Figura 1: Caixa d'água formada por casca cilíndrica e diagrama da casca “desenrolada”

2. Simplifique as expressões abaixo. Expressões como estas são comuns em cálculo ao aplicar a *regra do quociente*.

(a) 
$$\frac{3(x+2)^2(x-3)^2 - (x+2)^3(2)(x-3)}{(x-3)^4}$$

(b) 
$$\frac{2x(x+6)^4 - x^2(4)(x+6)^3}{(x+6)^8}$$

(c) 
$$\frac{3(1+x)^{1/3} - x(1+x)^{-2/3}}{(1+x)^{2/3}}$$

3. Complete os quadrados nas expressões abaixo para escrevê-las na forma  $(x - \alpha) + k$ , onde  $\alpha$  e  $k$  são constantes, como no exemplo:

(a)  $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$                       (c)  $x^2 - 2x - 1$   
 (b)  $x^2 - 6x + 10$     (d)  $x^2 + 4x + 1$

4. A desigualdade  $|x - x_0| < r$  pode ser representada na reta real como um intervalo aberto  $a < x < b$ . Em cada item encontre os valores de  $a$  e  $b$  correspondentes à desigualdade dada.

(a)  $|x| < 3$     (c)  $|x + 1| < 2$     (e)  $|x + 4| < 4$   
 (b)  $|x - 1| < 2$     (d)  $|x - 4| < 4$     (f)  $|x + 3| < 5$

5. Faça o inverso da questão 4. Para cada intervalo  $a < x < b$  encontre uma desigualdade equivalente  $|x - x_0| < r$ .

(a)  $-2 < x < 2$     (c)  $-2 < x < 1$     (e)  $-7 < x < 3$   
 (b)  $0 < x < 2$     (d)  $-4 < x < 0$     (f)  $-4 < x < -2$

6. Encontre os valores de  $x$  que satisfazem a desigualdade dada

(a)  $|x^2 - 4| < 2$     (c)  $|\arctan(x) - \frac{\pi}{8}| < \frac{\pi}{8}$     (e)  $|\cos(x)| < 2$   
 (b)  $|10^x - 4| < 3$     (d)  $|\log_3(x) - 2| < 1$     (f)  $|\sen(x) - 1| < \frac{1}{2}$

7. Escreva as expressões abaixo em termos de seno e cosseno e simplifique.

(a)  $\cos t \tan t$     (b)  $\sen \theta \sec \theta$     (c)  $\frac{\cot \theta}{\csc \theta - \sen \theta}$

8. Verifique as identidades

(a)  $\sen(x + y) - \sen(x - y) = 2 \cos(x) \sen(y)$   
 (b)  $\cos(x + y) - \cos(x - y) = 2 \cos(x) \cos(y)$   
 (c)  $\cos(x + y) \cos(x - y) = \cos^2(x) - \sen^2(y)$

9. Reescreva as expressões abaixo em função de  $\theta$  efetuando as substituições trigonométricas sugeridas, considerando  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  e simplifique:

(a)  $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ ,  $x = \sen \theta$     (c)  $\frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}$ ,  $x = 5 \sec \theta$   
 (b)  $\sqrt{1 + x^2}$ ,  $x = \tan \theta$

10. Obtenha  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ f$  e  $g \circ g$  e seus domínios.

(a)  $f(x) = 2x + 3$ ,  $g(x) = 4x - 1$     (d)  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ,  $g(x) = 2x - 1$   
 (b)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x + 1$   
 (c)  $f(x) = \frac{2}{x}$ ,  $g(x) = \frac{x}{x+2}$     (e)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $g(x) = x^2 - 4x$