Regras de diferenciação

ECT3207 – Cálculo Diferencial e Integral 1

Prof. Elton Carvalho

Escola de Ciências e Tecnologia
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Regras de diferenciação

Sejam f e g funções diferenciáveis em p e seja k uma constante.

Propriedades

1. $(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$ (Aditividade)
2. $(kf)'(p) = kf'(p)$ (Homogeneidade)
3. $(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$ (Regra do produto)
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(p) = \dfrac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}$ (Regra do quociente)

Regras de diferenciação

Sejam f e g funções diferenciáveis em p e seja k uma constante.

Propriedades

1. $(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$ (Aditividade)
2. $(kf)'(p) = kf'(p)$ (Homogeneidade)
3. $(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$ (Regra do produto)
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}$ (Regra do quociente)

Na notação de Leibniz:

1. $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(kf) = k\frac{df}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{[g]^2}$

Demonstração: Aditividade

$(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$

Partindo da definição

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(p) &= \lim_{x \to p} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(p)}{x-p} \\
&= \lim_{x \to p} \frac{f(x) + g(x) - f(p) - g(p)}{x-p} \\
&= \lim_{x \to p} \frac{[f(x) - f(p)] + [g(x) - g(p)]}{x-p}
\end{aligned}
$$

Demonstração: Aditividade

Demonstração: Aditividade

$(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$

Partindo da definição

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(p) &= \lim_{x\to p} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(p)}{x-p} \\
&= \lim_{x\to p} \frac{f(x) + g(x) - f(p) - g(p)}{x-p} \\
&= \lim_{x\to p} \frac{[f(x) - f(p)] + [g(x) - g(p)]}{x-p}
\end{aligned}
$$

$$
= \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} + \lim_{x\to p} \frac{g(x) - g(p)}{x-p}
$$

$$
(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)
$$

Demonstração: Homogeneidade

Demonstração: Homogeneidade

$(kf)'(p) = kf'(p)$

Partindo da definição

$$
\begin{aligned}
(kf)'(p) &= \lim_{x \to p} \frac{(kf)(x) - (kf)(p)}{x - p} \\
&= \lim_{x \to p} \frac{kf(x) - kf(p)}{x - p} \\
&= \lim_{x \to p} k \frac{f(x) - f(p)}{x - p}
\end{aligned}
$$

Demonstração: Homogeneidade

$(kf)'(p) = kf'(p)$

Partindo da definição

$$
\begin{aligned}
(kf)'(p) &= \lim_{x\to p} \frac{(kf)(x) - (kf)(p)}{x-p} \\
&= \lim_{x\to p} \frac{kf(x) - kf(p)}{x-p} \\
&= \lim_{x\to p} k\frac{f(x) - f(p)}{x-p}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= k\lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} \\
(kf)'(p) &= kf'(p)
\end{aligned}
$$

Demonstração: Regra do Produto

$$(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

Partindo da definição

$$\begin{aligned}
(fg)'(p) &= \lim_{x\to p} \frac{(fg)(x) - (fg)(p)}{x-p} \\
&= \lim_{x\to p} \frac{f(x)g(x) - f(p)g(p)}{x-p} \\
&= \lim_{x\to p} \frac{f(x)g(x) - [f(p)g(x) - f(p)g(x)] - f(p)g(p)}{x-p}
\end{aligned}$$

Demonstração: Regra do Produto

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to p} \frac{f(x)g(x) - [f(p)g(x) - f(p)g(x)]\, f(p)g(p)}{x-p} \\
&= \lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} g(x) + \lim_{x\to p} f(p) \frac{g(x)-g(p)}{x-p} \\
(fg)'(p) &= f'(p)g(p) + f(p)g'(p)
\end{aligned}
$$

Note:

$\lim_{x\to p} g(x) = g(p)$ pois g é derivável, portanto contínua, em p.

Demonstração: Regra do quociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}$$

Partindo da definição

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(p) &= \lim_{x\to p} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(p)}{x-p} = \lim_{x\to p} \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) - \left(\frac{f(p)}{g(p)}\right)}{x-p} \\
&= \lim_{x\to p} \frac{\left(\frac{f(x)g(p)-f(p)g(x)}{g(x)g(p)}\right)}{x-p} \\
&= \lim_{x\to p} \frac{f(x)g(p) - f(p)g(x)}{x-p} \frac{1}{g(x)g(p)}
\end{aligned}$$

Demonstração: Regra do Produto

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to p} \frac{f(x)g(p) - f(p)g(x)}{x-p}\,\frac{1}{g(x)g(p)} \\
&= \lim_{x\to p} \frac{f(x)g(p) - f(p)g(p) + f(p)g(p) - f(p)g(x)}{x-p}\,\frac{1}{g(x)g(p)} \\
&= \lim_{x\to p} \left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p}g(p) - f(p)\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right]\frac{1}{g(x)g(p)}
\end{aligned}
$$

$$
\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}
$$

Conteúdo auxiliar

Visite a página da disciplina:

https://pessoal.ect.ufrn.br/~elton.carvalho/C1/aulas/12/

References I

[1] Hamilton Luiz Guidorizzi.
***Um Curso de Cálculo*, volume 1.**
LTC, ªedição edition, 2001.

[2] James Stewart.
***Calculus*.**
Cengage, 7ªedição edition, 2012.