Derivadas de funções elementares

ECT3207 – Cálculo Diferencial e Integral 1

Prof. Elton Carvalho

Escola de Ciências e Tecnologia
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Potências de x

Seja n natural, $n \neq 0$. Considere as potências racionais de x: x^n; $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$:

- $f(x) = x^0 \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Potências de x

Seja n natural, $n \neq 0$. Considere as potências racionais de x: x^n; $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$:

- $f(x) = x^0 \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

- $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}$ com $x \neq 0$
- $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ com $x > 0$ se n par e $x \neq 0$ se n ímpar $n \geq 2$.

Potências de x

Seja n natural, $n \neq 0$. Considere as potências racionais de x: x^n; $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$:

- $f(x) = x^0 \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

- $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}$ com $x \neq 0$
- $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ com $x > 0$ se n par e $x \neq 0$ se n ímpar $n \geq 2$.

Em geral

$$f(x) = x^k \Rightarrow f'(x) = kx^{k-1}, \text{ para todo } k \neq 0 \in \mathbb{R}$$

Demonstração

Seja $f(x) = x^n$, com n natural, $n \neq 0$. Vamos demonstrar que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Partindo da definição

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}
\end{aligned}
$$

Demonstração

Seja $f(x) = x^n$, com n natural, $n \neq 0$. Vamos demonstrar que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Partindo da definição

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Binômio de Newton

$$\begin{aligned}(x+h)^n &= x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-2}h^2 + \\ &+ \cdots + nxh^{n-1} + h^n \\ &= x^n + h\left[nx^{n-1} + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]\end{aligned}$$

Demonstração para $f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n} + h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right] - \cancel{x^n}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$$

Demonstração para $f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n} + h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right] - \cancel{x^n}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \mathcal{O}(h)$$

$$= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \cancel{\mathcal{O}(h)}$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Demonstração para $f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n} + h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right] - \cancel{x^n}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \mathcal{O}(h)$$

$$= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \cancel{\mathcal{O}(h)}$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Portanto

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Demonstração para $f(x) = x^{-n}$

Seja $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, com n natural, $n \neq 0$. Vamos demonstrar que $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

Partindo da definição

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^n - (x+h)^n}{h} \frac{1}{(x+h)^n x^n}
\end{aligned}
$$

Demonstração para $f(x) = x^{-n}$

Seja $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, com n natural, $n \neq 0$. Vamos demonstrar que $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

Partindo da definição

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n - (x+h)^n}{h} \frac{1}{(x+h)^n x^n}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{x^n - (x+h)^n}{h}}_{-nx^{n-1}} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^n x^n}}_{\frac{1}{x^{2n}}}$$

$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

$$f'(x) = -nx^{-n-1}$$

Demonstração para $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Seja $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, com n natural, $n \neq 0$. Vamos demonstrar que $f'(x) = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

Partindo da definição

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} \end{aligned}$$

Demonstração para $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Seja $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, com n natural, $n \neq 0$. Vamos demonstrar que $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

Partindo da definição

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h}
\end{aligned}
$$

Mudança de variável

$$
\begin{cases}
u = \sqrt[n]{x+h} \\
v = \sqrt[n]{x} \\
h = u^n - v^n \\
\lim_{h \to 0} u = v
\end{cases}
$$

Demonstração para $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Mudança de variável

$$\begin{cases} u = \sqrt[n]{x+h} \\ v = \sqrt[n]{x} \\ h = u^n - v^n \\ \lim\limits_{h\to 0} u = v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} \\ &= \lim_{u\to v} \frac{u-v}{u^n - v^n} \\ &= \lim_{u\to v} \frac{1}{\left(\frac{u^n-v^n}{u-v}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(\lim\limits_{u\to v} \frac{u^n - v^n}{u-v}\right)} \\ &= \frac{1}{nv^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{nv^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} \\ f'(x) &= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

Exemplos

Calcule $f'(x)$:

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
3. $f(x) = \sqrt{x}$

Calcule $f'(x)$:

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$
3. $f(x) = \sqrt[4]{x}$

Calcule $f'(x)$:

1. $f(x) = x^{-3}$
2. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^5}$
3. $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

Funções exponencial e logarítmica

Base natural

- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Funções exponencial e logarítmica

Base natural

- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Demais bases

- $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \ln(a)}$

Demonstração para $f(x) = e^x$

Partindo da definição

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)} - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h}}_{f'(0)} \\
&= e^x f'(0)
\end{aligned}
$$

Demonstração para $f(x) = e^x$

Partindo da definição

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)} - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h}}_{f'(0)} \\
&= e^x f'(0)
\end{aligned}$$

Calculando $f'(0)$

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}.
\end{aligned}$$

Demonstração para $f(x) = e^x$

Partindo da definição

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)} - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h}}_{f'(0)} \\
&= e^x f'(0)
\end{aligned}$$

Calculando $f'(0)$

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}.
\end{aligned}$$

Mudança de variável

$$\begin{cases}
u = e^h - 1 \\
h = \ln(1+u) \\
h \to 0 \Rightarrow u \to 0
\end{cases}$$

Demonstração para $f(x) = e^x$

Mudança de variável

$$\begin{cases} u = e^h - 1 \\ h = \ln(1+u) \\ h \to 0 \Rightarrow u \to 0 \end{cases}$$

Demonstração para $f(x) = e^x$

Mudança de variável

$$\begin{cases} u = e^h - 1 \\ h = \ln(1+u) \\ h \to 0 \Rightarrow u \to 0 \end{cases}$$

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{u}{\ln(1+u)} = \frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)}$$

Demonstração para $f(x) = e^x$

Mudança de variável

$$\begin{cases} u = e^h - 1 \\ h = \ln(1+u) \\ h \to 0 \Rightarrow u \to 0 \end{cases}$$

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{u}{\ln(1+u)} = \frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)} = \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

Mudança de variável

$$\begin{cases} u = e^h - 1 \\ h = \ln(1+u) \\ h \to 0 \Rightarrow u \to 0 \end{cases}$$

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{u}{\ln(1+u)} = \frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)} = \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

Então

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\lim_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]}$$

Demonstração para $f(x) = e^x$

Mudança de variável

$$\begin{cases} u = e^h - 1 \\ h = \ln(1+u) \\ h \to 0 \Rightarrow u \to 0 \end{cases}$$

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{u}{\ln(1+u)} = \frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)} = \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

Então

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\lim_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]}$$

Calculando $\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}$:

Mudança de variável

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{u} \\ u \to 0^+ \Rightarrow z \to +\infty \\ u \to 0^- \Rightarrow z \to -\infty \end{cases}$$

Demonstração para $f(x) = e^x$

Mudança de variável

$$\begin{cases} u = e^h - 1 \\ h = \ln(1+u) \\ h \to 0 \Rightarrow u \to 0 \end{cases}$$

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{u}{\ln(1+u)} = \frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)} = \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

Então

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]}$$

Calculando $\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}$:

Mudança de variável

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{u} \\ u \to 0^+ \Rightarrow z \to +\infty \\ u \to 0^- \Rightarrow z \to -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{u\to 0+}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{z\to +\infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e$$

Demonstração para $f(x) = e^x$

$$\lim_{u\to 0+}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{z\to +\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$$
$$= e$$

Demonstração para $f(x) = e^x$

$$\lim_{u\to 0+}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$$
$$= e$$

$$\ln\lim_{u\to 0+}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$$
$$= \ln e$$
$$= 1$$

Conteúdo auxiliar

Visite a página da disciplina:

https://pessoal.ect.ufrn.br/~elton.carvalho/C1/aulas/10/

References I

[1] Hamilton Luiz Guidorizzi.
***Um Curso de Cálculo*, volume 1.**
LTC, ªedição edition, 2001.

[2] James Stewart.
***Calculus*.**
Cengage, 7ªedição edition, 2012.