Lista de exercícios
Revisão 3.2 — Formas quadráticas
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega: 19/07/2023

Esta lista se refere ao conteúdo das aulas

- Aula 22 Formas quadráticas
- Aula 23 Diagonalização de Formas Quadráticas
- Aula 24 Cônicas e superfícies quadráticas
- Aula 25 Superfícies quadráticas

Verifique as instruções sobre a atividade na página da disciplina. Envie as resoluções das questões pedidas na página de instruções pelo Formulário do Google.

1. Qual é a matriz $M_{2\times 2}$ associada à forma bilinear $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que dá o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$?

2. Escreva a matriz das formas bilineares simétricas que dão origem às formas quadráticas abaixo:
   (a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2x_3$
   (b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_2x_3$
   (c) $q(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

3. Para cada forma quadrática da questão anterior, execute os seguintes passos:
   (a) Obtenha os autovalores e respectivos autovetores da matriz da forma quadrática.
   (b) Escreva a matriz diagonal, formada pelos autovalores.
   (c) Verifique que os autovetores são ortogonais (considerando o produto interno usual)
   (d) Normalize os autovetores e escreva a base ortonormal B de autovetores em que a forma quadrática é diagonal.
   (e) Escreva a matriz mudança de base $[I]_C^B$, da base diagonal para a base canônica.
   (f) Verifique que $[I]_C^B$ é uma matriz ortogonal ($A^{-1} = A^T$).

4. Execute os passos descritos na questão 5 para as seguintes equações:
   (a) $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$

(b) $2x^2 - 5y^2 - 7 = 0$

(c) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

(d) $xy + x + y = 0$

(e) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - \sqrt{2}x = 0$

(f) $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$

5. Efetue os seguintes passos para cada equação da questão anterior:

   (a) Escreva a equação dada na forma matricial:

   $$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0,$$

   onde Q é uma matriz quadrada simétrica, L é uma matriz de forma linear e F é uma constante escalar.

   (b) Obtenha os autovalores e autovetores da matriz da forma quadrática Q.

   (c) Obtenha uma base B, *ortonormal*, formada pelos autovetores da matriz Q.

   (d) Escreva a matriz mudança de base $M = [I]_C^B$, da base diagonal B para a base canônica C. Note que, conforme item (f) da questão 3, a matriz $M = [I]_C^B$ é uma matriz ortogonal, logo $M^{-1} = M^T$.

   (e) Escreva a equação do item (a) nas coordenadas da base B, fazendo a transformação $F_B = FM$.

   (f) Utilize a equação obtida no item anterior para escrever a equação algébrica.

   (g) Analise os sinais dos autovalores da matriz Q. Trata-se de uma equação de elipse, hipérbole ou parábola? Não é necessário avaliar casos degenerados por enquanto.

   (h) Escreva a equação do item (f) na forma canônica, considerando possíveis translações da origem.

   (i) Classifique a curva descrita pela equação: elipse, hiperbole, parábola ou conjunto de retas (caso degenerado). Dê as coordenadas da origem, descreva os focos/retas assíntotas quando existirem.

6. Execute os passos descritos na questão 7 para as seguintes equações:

   (a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4z + 3 = 0$

   (b) $2x^2 - 8x - 4y - 2z + 2 = 0$

   (c) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz + 1 = 0$

   (d) $-x^2 + 2yz + z - y = 100$

   (e) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 81$

7. Efetue os seguintes passos para cada equação da questão anterior:

   (a) Escreva a equação dada na forma matricial:

   $$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + F = 0,$$

   onde Q é uma matriz quadrada simétrica, L é uma matriz de forma linear e F é uma constante escalar.

(b) Obtenha os autovalores e autovetores da matriz da forma quadrática Q.

(c) Obtenha uma base B, *ortonormal*, formada pelos autovetores da matriz Q.

(d) Escreva a matriz mudança de base $M = [I]_C^B$, da base diagonal B para a base canônica C. Note que, conforme item (f) da questão 3, a matriz $M = [I]_C^B$ é uma matriz ortogonal, logo $M^{-1} = M^T$.

(e) Escreva a equação do item (a) nas coordenadas da base B, fazendo a transformação $F_B = FM$.

(f) Utilize a equação obtida no item anterior para escrever a equação algébrica.

(g) Analise os sinais dos autovalores da matriz Q. Trata-se de uma equação de elipsoide, hiperboloide de uma ou duas folhas ou paraboloide? Não é necessário avaliar casos degenerados.

(h) Escreva a equação do item (f) na forma canônica, considerando possíveis translações da origem.

(i) Classifique a superfície descrita pela equação: elipsoide, hiperboloide, paraboloide ou conjunto de retas (caso degenerado). Dê as coordenadas da origem, descreva as direções dos eixos da curva.