Lista de exercícios
Revisão 3.1 — Autovalores e Autovetores
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega: 05/07/2023

Esta lista se refere ao conteúdo das aulas

- Aula 19 Autovalores e Autovetores
- Aula 20 Diagonalização de Transformações lineares
- Aula 21 Aplicações de Diagonalização

Verifique as instruções sobre a atividade na página da disciplina. Envie as resoluções das questões pedidas na página de instruções pelo Formulário do Google.

1. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + y, x - y)$.
   (a) Escreva a matriz $[T]$ desse operador em relação à base canônica.
   (b) Escreva $p_T(\lambda) = \det([T] - \lambda\mathbb{1})$, o polinômio característico de T. Qual o grau desse polinômio, na variável λ?
   (c) Obtenha as raízes de $p_T(\lambda)$, os autovalores de T. Qual a multiplicidade algébrica de cada raiz?
   (d) Para cada autovalor λ obtido no item anterior, encontre um conjunto L.I. de autovetores $\boldsymbol{v}$ associados a λ pela equação $T(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$.
   (e) Quantos autovetores L.I. estão associados a cada autovalor? Essa é a *multiplicidade geométrica* do autovalor. Compare com a multiplicidade algébrica.
   (f) O conjunto B de autovetores que você encontrou forma uma base de $\mathbb{R}^2$? Se sim, escreva a matriz mudança de base de B para a base canônica: $[\mathbb{I}]^B_C$.
   (g) Se B for base, escreva $[T]_B$, a matriz de T na base B.

2. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x - y + \frac{3}{2}z, y, \frac{3}{2}x - y + \frac{1}{2}z\right)$.
   (a) Escreva a matriz $[T]$ desse operador em relação à base canônica.
   (b) Escreva $p_T(\lambda) = \det([T] - \lambda\mathbb{1})$, o polinômio característico de T. Qual o grau desse polinômio, na variável λ?
   (c) Obtenha as raízes de $p_T(\lambda)$, os autovalores de T. Qual a multiplicidade algébrica de cada raiz?

(d) Para cada autovalor λ obtido no item anterior, encontre um conjunto L.I. de autovetores $\boldsymbol{v}$ associados a λ pela equação $T(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$.

(e) Quantos autovetores L.I. estão associados a cada autovalor? Essa é a *multiplicidade geométrica* do autovalor. Compare com a multiplicidade algébrica.

(f) O conjunto B de autovetores que você encontrou forma uma base de $\mathbb{R}^3$? Se sim, escreva a matriz mudança de base de B para a base canônica: $[\mathbb{I}]_C^B$.

(g) Se B for base, escreva $[T]_B$, a matriz de T na base B.

3. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = \left(z, \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z, x\right)$.

   (a) Escreva a matriz $[T]$ desse operador em relação à base canônica.

   (b) Escreva $p_T(\lambda) = \det([T] - \lambda\mathbb{1})$, o polinômio característico de T. Qual o grau desse polinômio, na variável λ?

   (c) Obtenha as raízes de $p_T(\lambda)$, os autovalores de T. Qual a multiplicidade algébrica de cada raiz?

   (d) Para cada autovalor λ obtido no item anterior, encontre um conjunto L.I. de autovetores $\boldsymbol{v}$ associados a λ pela equação $T(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$.

   (e) Quantos autovetores L.I. estão associados a cada autovalor? Essa é a *multiplicidade geométrica* do autovalor. Compare com a multiplicidade algébrica.

   (f) O conjunto B de autovetores que você encontrou forma uma base de $\mathbb{R}^3$? Se sim, escreva a matriz mudança de base de B para a base canônica: $[\mathbb{I}]_C^B$.

   (g) Se B for base, escreva $[T]_B$, a matriz de T na base B.

4. Considere o operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ dado por $T(a+bt+ct^2) = \left(\frac{a}{2} - b + \frac{3c}{2}\right) + bt + \left(\frac{3a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)t^2$.

   (a) Escreva a matriz $[T]$ desse operador em relação à base canônica $C = \{1, t, t^2\}$.

   (b) Escreva $p_T(\lambda) = \det([T] - \lambda\mathbb{1})$, o polinômio característico de T. Qual o grau desse polinômio, na variável λ?

   (c) Obtenha as raízes de $p_T(\lambda)$, os autovalores de T. Qual a multiplicidade algébrica de cada raiz?

   (d) Para cada autovalor λ obtido no item anterior, encontre um conjunto L.I. de autovetores $\boldsymbol{v}$ associados a λ pela equação $[T][\boldsymbol{v}] = \lambda[\boldsymbol{v}]$. Note que resolvendo esse sistema linear, você oberá as *coordenadas*, $[\boldsymbol{v}]$, do autovetor. Após obter as coordenadas, escreva o polinômio explicitamente.

   (e) Quantos autovetores L.I. estão associados a cada autovalor? Essa é a *multiplicidade geométrica* do autovalor. Compare com a multiplicidade algébrica.

   (f) O conjunto B de autovetores que você encontrou forma uma base de $P_2(\mathbb{R})$? Se sim, escreva a matriz mudança de base de B para a base canônica: $[\mathbb{I}]_C^B$.

   (g) Se B for base, escreva $[T]_B$, a matriz de T na base B.

5. Verifique que λ é autovalor e $\boldsymbol{v}_\lambda$ é o respectivo autovetor do operador $T : C(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R})$ nos casos:

(a) $T(f(x)) = f'(x)$; $\lambda = \lambda$; $v_\lambda = e^{\lambda x}$

(b) $T(f(t)) = f''(t)$; $\lambda = -\omega^2$; $v_\lambda = \operatorname{sen}(\omega t)$

(c) $T(f(t)) = f''(t)$; $\lambda = -\omega^2$; $v_\lambda = \cos(\omega t)$

6. Considere o operador linear $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tem os autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ e que o vetor $v_1 = (1, 1)$ é o autovetor associado ao autovalor λ_1 e $v_2 = (-1, 1)$ é o autovetor associado ao autovalor λ_2.
   (a) Calcule $F(1, 1)$ e $F(-1, 1)$.
   (b) Calcule $F(2, 2)$ e $F(1, -1)$.
   (c) Escreva a matriz $[F]_B$ na base $B = \{v_1, v_2\}$ de autovetores de F. Lembre-se que $[v_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   (d) Escreva os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos autovetores.
   (e) Calcule $F(1, 0)$ e $F(0, 1)$.
   (f) Escreva uma expressão para $F(x, y)$.
   (g) Escreva as matrizes mudança de base $[I]_C^B$ da base de autovetores para a base canônica e $[I]_B^C$ da base canônica para a base de autovetores. Note que não é preciso inverter nenhuma matriz e você pode usar o resultado do item (d).
   (h) Verifique que $[F]_C = [I]_C^B [F]_B [I]_B^C$.

7. Considere o operador linear $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tem os autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$ e que o vetor $v_1 = (-2, 1)$ é o autovetor associado ao autovalor λ_1 e $v_2 = (3, 1)$ é o autovetor associado ao autovalor λ_2.
   (a) Calcule $F(-2, 1)$ e $F(3, 1)$.
   (b) Calcule $F(2, -1)$ e $F\left(1, \frac{1}{3}\right)$.
   (c) Escreva a matriz $[F]_B$ na base $B = \{v_1, v_2\}$ de autovetores de F. Lembre-se que $[v_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   (d) Escreva os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos autovetores.
   (e) Calcule $F(1, 0)$ e $F(0, 1)$.
   (f) Escreva uma expressão para $F(x, y)$.
   (g) Escreva as matrizes mudança de base $[I]_C^B$ da base de autovetores para a base canônica e $[I]_B^C$ da base canônica para a base de autovetores. Note que não é preciso inverter nenhuma matriz e você pode usar o resultado do item (d).
   (h) Verifique que $[F]_C = [I]_C^B [F]_B [I]_B^C$.

8. Considere o operador linear $F : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ que tem os autovalores $\lambda_1 = 1$, e $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 0$ e que o vetor $v_1 = 1 + t$ é o autovetor associado ao autovalor λ_1, $v_2 = 1 + t^2$ é o autovetor associado ao autovalor λ_2 e $v_3 = 1 - t$ é o autovetor associado ao autovalor λ_3.
   (a) Calcule $F(1 + t)$, $F(1 + t^2)$ e $F(1 - t)$.
   (b) Calcule $F(-1 - t)$, $F(3 + 3t^2)$ e $F(-1 + t)$.

(c) Escreva a matriz $[F]_B$ na base $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ de autovetores de F. Lembre-se que $[\boldsymbol{v}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Escreva os vetores da base canônica $C = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ como combinação linear dos autovetores.

(e) Calcule $F(1)$, $F(t)$ e $F(t^2)$.

(f) Escreva uma expressão para $F(a + bt + ct^2)$.

(g) Escreva as matrizes mudança de base $[I]_C^B$ da base de autovetores para a base canônica e $[I]_B^C$ da base canônica para a base de autovetores. Note que não é preciso inverter nenhuma matriz e você pode usar o resultado do item (d).

(h) Verifique que $[F]_C = [I]_C^B [F]_B [I]_B^C$.

9. Considere $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule os autovalores e autovetores correspondentes de A e A^2.

   (b) O que você pode dizer ao comparar os autovetores de A e A^2?

   (c) E quanto aos autovalores?

   (d) O que você espera dos autovalores e autovetores de A^3? Verifique.

   (e) Use a equação de autovetores $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ para demonstrar esse resultado para A^n.

10. Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule os autovalores e autovetores correspondentes de A e A^{-1}, a matriz inversa de A.

   (b) O que você pode dizer ao comparar os autovetores de A e A^{-1}?

   (c) E quanto aos autovalores?

   (d) Use a equação de autovetores $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ para demonstrar esse resultado para uma matriz A inversível qualquer. (Sugestão multiplique por A^{-1} pela esquerda de ambos os lados)

11. Sejam a base canônica de $\mathbb{R}^3$: $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, a base $B = \{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Encontre o polinômio característico de T, os autovalores de T e os autovetores correspondentes.

   (b) Encontre $[T]_B$ e o polinômio característico. O que você pode dizer a respeito dele?

   (c) Encontre uma base D de $\mathbb{R}^3$, se possível, tal que $[T]_D$ seja diagonal. Escreva a matriz M tal que $[T]_D = M^{-1}\,[T]_C\,M$.

12. Seja $A \in L(\mathbb{R}^3)$ o operador linear cuja matriz relativa à base canônica é

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Obtenha os autovalores e autovetores de A.

   (b) Mostre que existe uma base B de $\mathbb{R}^3$, ortonormal, formada por autovetores de A.

   (c) Escreva a matriz mudança de base da base de autovetores de A para a base canônica. Verifique que é uma matriz ortogonal $M^{-1} = M^t$.

   (d) Mostre que $[A]_B = M^T [A] M$.

13. Resolva o sistema $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{u}(t)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ sujeito à condição inicial $\boldsymbol{u}(t = 0) = (0, 1)$. Para isso, efetue os passos da questão 1 da lista da aula 21.