

Lista de exercícios

Revisão 2.2 — Matrizes de transformações

Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega: 21/06/2023

Esta lista se refere ao conteúdo das aulas

- Aula 14 [Álgebra de Transformações lineares](#)
- Aula 15 [Matriz de uma transformação linear](#)
- Aula 16 [Matriz da transformação composta](#)
- Aula 17 [Transformações lineares e a geometria](#)
- Aula 18 [Operadores autoadjuntos e hermitianos](#)

Verifique as [instruções sobre a atividade na página da disciplina](#). Envie as resoluções das questões pedidas na página de instruções pelo [Formulário do Google](#).

1. Seja $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ base canônica do $\mathbb{R}^3$. Se $F \in L(\mathbb{R}^3)$ é o operador tal que

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$$

$$F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$$

$$F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1,$$

- (a) determine $F(x, y, z)$
 - (b) e mostre que $F^3 = \mathbb{I}$ e, portanto, $F^2 = F^{-1}$. [\[Nota 1\]](#)
 - (c) Obtenha uma expressão para F^{100} .
2. Mostre que o operador $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ projeção sobre o plano xy , dado por $F(x, y, z) = (x, y, 0)$, é idempotente, ou seja $F^2 = F$.
 3. Mostre que o operador $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (y + z, z, 0)$, é nilpotente, ou seja, existe uma potência n de F tal que $F^n = \mathbf{0}$, o operador nulo.
 4. Mostre que o operador derivação no espaço $P_n(\mathbb{R})$ é nilpotente.

^[Nota 1] $\mathbb{I}$ é o operador identidade: $\mathbb{I}(v) = v$

5. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada pela seguinte matriz, em relação à base canônica:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

- (a) Calcule $T(1, 0)$.
 - (b) Calcule $T(0, 1)$.
 - (c) Calcule $T(2, -1)$.
 - (d) Calcule $T(a + b, a - b)$.
 - (e) Calcule $T(x, y)$.
6. Considere a transformação linear $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, que leva um vetor do $\mathbb{R}^3$ a um polinômio de grau ≤ 2 . A transformação é dada pela expressão

$$F(x, y, z) = x + yt + zt^2$$

Sejam $B = \{1, t, t^2\}$ a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ e $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Calcule $F(1, 0, 0)$, $F(0, 1, 0)$ e $F(0, 0, 1)$, ou seja, F aplicada à base canônica de $\mathbb{R}^3$.
 - (b) Obtenha as coordenadas de $F(1, 0, 0)$, $F(0, 1, 0)$ e $F(0, 0, 1)$ em relação à base B .
 - (c) Escreva a matriz $[F]_B^C$ em relação às bases canônicas dos espaços.
 - (d) Escreva $[v]_C$, a matriz de coordenadas de $v = (2, -1, 3)$ em relação à base C .
 - (e) Calcule $[F(v)]_B = [F]_B^C [v]_C$.
 - (f) Escreva explicitamente o polinômio $F(v)$.
 - (g) Calcule $F(x_0, v_0, \frac{g}{2})$.
7. Considere a transformação linear $G : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, que leva um polinômio de grau ≤ 2 a um vetor do $\mathbb{R}^3$. A transformação é dada pela expressão

$$G(a + bt + ct^2) = (a + b, b - c, c + a).$$

Sejam $B = \{1, t, t^2\}$ a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ e $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Calcule $G(1)$, $G(t)$, $G(t^2)$, ou seja, G aplicada à base B .
 - (b) Obtenha as coordenadas de $G(1)$, $G(t)$, $G(t^2)$, em relação à base C .
 - (c) Escreva a matriz $[G]_C^B$.
 - (d) Escreva $[v]_B$, a matriz de coordenadas de $v = 1 + t - \frac{1}{2}t^2$ em relação à base B .
 - (e) Calcule $[G(v)]_C = [G]_C^B [v]_B$.
 - (f) Escreva explicitamente o vetor $G(v)$.
 - (g) Calcule $[G(x + 2yt - 3zt^2)]_C$.
8. Considere o operador linear $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$[F] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Calcule $[F(-1, 2, 3)]$
- (b) Obtenha uma expressão para $F(x, y, z)$

9. Considere a transformação linear $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ cuja matriz é

$$[G]_B^C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

Com $B = \{1, t, t^2\}$ a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ e $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Calcule $[G(-1, 2, 3)]_B$
- (b) Escreva explicitamente o polinômio $G(-1, 2, 3)$
- (c) Obtenha uma expressão para $G(x, y, z)$

10. Considere a transformação linear $H : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz é

$$[H]_C^B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

Com $B = \{1, t, t^2\}$ a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ e $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Calcule $[H(-1 + 2t + 3t^2)]_C$
- (b) Escreva explicitamente o vetor $H(-1 + 2t + 3t^2)$
- (c) Obtenha uma expressão para $H(a + bt + ct^2)$

11. Obtenha a matriz do operador linear $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$G(x, y) = (2x - 3y, 4x + y)$$

em relação à base $B = \{\mathbf{u}_1 = (1, -2), \mathbf{u}_2 = (2, -5)\}$ seguindo estes passos:

- (a) Obtenha $G(\mathbf{u}_1)$ e $G(\mathbf{u}_2)$, as imagens dos vetores da base.
- (b) Escreva cada um dos vetores calculados no item anterior como combinação linear dos vetores da base. Obtenha a matriz de coordenadas desses vetores.
- (c) Construa a matriz $[G]_B$ com as matrizes de coordenadas do item anterior como colunas.

Considere o vetor $\mathbf{v} = (4, -3) \in \mathbb{R}^2$

- (d) Obtenha $[\mathbf{v}]_B$, a matriz de coordenadas de $\mathbf{v}$ relativa à base B .
- (e) Calcule $[G(\mathbf{v})]_B = [G]_B [\mathbf{v}]_B$
- (f) Calcule $G(\mathbf{v})$ a partir das coordenadas do item anterior.

12. Obtenha a matriz do operador linear $T : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ dado por

$$T(a + bt) = (2a - 3b) + (4a + b)t$$

em relação à base $B = \{\mathbf{u}_1 = 1 - 2t, \mathbf{u}_2 = 2 - 5t\}$ seguindo estes passos:

- (a) Obtenha $T(\mathbf{u}_1)$ e $T(\mathbf{u}_2)$, as imagens dos vetores da base.
- (b) Escreva cada um dos vetores calculados no item anterior como combinação linear dos vetores da base. Obtenha a matriz de coordenadas desses vetores.
- (c) Construa a matriz $[T]_B$ com as matrizes de coordenadas do item anterior como colunas.

Considere o vetor $\mathbf{v} = 4 - 3t \in P_1(\mathbb{R})$

- (d) Obtenha $[\mathbf{v}]_B$, a matriz de coordenadas de $\mathbf{v}$ relativa à base B .
 - (e) Calcule $[T(\mathbf{v})]_B = [T]_B [\mathbf{v}]_B$
 - (f) Escreva explicitamente o polinômio $T(\mathbf{v})$ a partir das coordenadas do item anterior.
13. Determine a matriz do operador diferencial em $P_3(\mathbb{R})$, dado por $D(f) = \frac{df}{dt}$ em relação à base canônica desse espaço.
14. O conjunto $\{e^{3t}, te^{3t}, t^2e^{3t}\}$ é uma base de um espaço vetorial V de funções reais ^[Nota 2]. Seja $D : V \rightarrow V$ o operador diferencial $D(f) = \frac{df}{dt}$. Obtenha a matriz de D na base dada.
15. Os *Polinômios de Hermite* são uma base do espaço dos polinômios que, até grau 3, são: $\{1, 2x, 4x^2 - 2, 8x^3 - 12x\}$. Descrever o espaço dos polinômios nesta base é útil ao lidar com osciladores harmônicos (sistemas que se comportam como massa-mola, pêndulos) em mecânica quântica para descrever as ligações químicas e fenômenos como reações químicas, fluorescência e absorção de luz por moléculas. Esses polinômios também são úteis em processamento de sinais pois as relações entre o sinal e as frequências presentes é trivial ^[Nota 3].

Escreva a matriz do operador derivação do espaço $P_4(\mathbb{R})$ nesta base.

16. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformações lineares definidas por

$$F(x, y, z) = (x + y, z)$$

$$G(x, y, z) = (x, y - z)$$

- (a) Obtenha as matrizes de F e G em relação às bases canônicas dos espaços.
- (b) Obtenha a matriz $[F + G]$.
- (c) Calcule $[(F + G)(2, 3, -4)]$
- (d) Obtenha uma expressão para a transformação $F + G$
- (e) Obtenha a matriz $[2F - 3G]$.
- (f) Calcule $[(2F - 3G)(2, 3, -4)]$
- (g) Obtenha uma expressão para a transformação $2F - 3G$

^[Nota 2] V é subespaço de $C^\infty(\mathbb{R})$, o espaço vetorial das funções reais cujas derivadas de qualquer ordem são contínuas

^[Nota 3] Mas fora do escopo desta unidade...

17. Sejam $S : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ transformações lineares definidas por

$$\begin{aligned} S(a + bt + ct^2) &= (a + b) + (a - b + c)t + (b - c)t^2 \\ T(a + bt + ct^2) &= (a - c) + (b + c)t + (b + c)t^2 \end{aligned}$$

- (a) Obtenha as matrizes de S e T em relação à base canônica de $P_2(\mathbb{R})$.
- (b) Obtenha a matriz $[S + T]$.
- (c) Calcule $[(S + T)(\mathbf{v})]$, com $\mathbf{v} = 2 - t + 3t^2$.
- (d) Obtenha uma expressão para a transformação $S + T$.
- (e) Obtenha a matriz $[3S - 5T]$.
- (f) Calcule $[(3S - 5T)(\mathbf{v})]$, com $\mathbf{v} = 2 - t + 3t^2$.
- (g) Obtenha uma expressão para a transformação $3S - 5T$.

18. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformações lineares dadas por

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação às bases canônicas dos espaços envolvidos. Considere os vetores $\mathbf{v} = (4, -1, 5)$ e $\mathbf{w} = (3, 4, 1)$ e, utilizando as matrizes das transformações,

- (a) Obtenha a matriz $[F + G]$.
- (b) Calcule $(F + G)(\mathbf{v})$ e $(F + G)(\mathbf{w})$. Escreva a matriz de coordenadas e o vetor explicitamente.
- (c) Obtenha a matriz $[H \circ F]$.
- (d) Calcule $(H \circ F)(\mathbf{v})$ e $(H \circ F)(\mathbf{w})$. Escreva a matriz de coordenadas e o vetor explicitamente.
- (e) Obtenha uma expressão para $(H \circ F)(x, y, z)$.
- (f) Calcule $(H \circ G)(\mathbf{v})$ e $(H \circ G)(\mathbf{w})$. Escreva a matriz de coordenadas e o vetor explicitamente.
- (g) Obtenha matriz $[H \circ G]$.
- (h) Obtenha matriz $[H \circ (F + G)]$.
- (i) Obtenha matriz $[H \circ F + H \circ G]$. Compare com o item anterior.
- (j) Obtenha matriz $[H^2 = H \circ H]$.

19. Sejam $F : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$, $G : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ e $H : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ transformações lineares dadas por

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação às bases canônicas dos espaços envolvidos. Considere os vetores $\mathbf{v} = 4 - t + 5t^2$ e $\mathbf{w} = 3 + 4t + t^2$.

- (a) Obtenha a matriz $[F + G]$.
- (b) Calcule $(F + G)(\mathbf{v})$ e $(F + G)(\mathbf{w})$. Escreva a matriz de coordenadas e o polinômio explicitamente.
- (c) Obtenha a matriz $[H \circ F]$.
- (d) Calcule $(H \circ F)(\mathbf{v})$ e $(H \circ F)(\mathbf{w})$. Escreva a matriz de coordenadas e o polinômio explicitamente.
- (e) Obtenha uma expressão para $(H \circ F)(a + bt + ct^2)$.
- (f) Calcule $(H \circ G)(\mathbf{v})$ e $(H \circ G)(\mathbf{w})$. Escreva a matriz de coordenadas e o polinômio explicitamente.
- (g) Obtenha matriz $[H \circ G]$.
- (h) Obtenha matriz $[H \circ (F + G)]$.
- (i) Obtenha matriz $[H \circ F + H \circ G]$. Compare com o item anterior.
- (j) Obtenha matriz $[H^2 = H \circ H]$.
20. O operador identidade $\mathbb{I} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é tal que $\mathbb{I}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Escreva a matriz $[\mathbb{I}]_B$ em relação à base B que você quiser, considerando a mesma base no domínio e na imagem.
21. Seja $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ base canônica do $\mathbb{R}^3$. Se $F \in L(\mathbb{R}^3)$ é o operador tal que
- $$\begin{aligned} F(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_2 \\ F(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_3 \\ F(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1, \end{aligned}$$
- (a) Determine a matriz $[F]$ em relação à base canônica.
- (b) Mostre que $[F^3] = [\mathbb{I}]$ e, portanto, $[F^2] = [F^{-1}]$.
- (c) Obtenha a matriz $[F^{100}]$.
22. Em $\mathbb{R}^2$, a transformação $R_\theta(x, y)$ gira os vetores de um ângulo θ em sentido anti-horário. [Nota 4]
- (a) Escreva uma expressão para $R_\theta(x, y)$. Para isto, considere o que R_θ faz com cada vetor da base canônica.
- (b) Escreva a matriz de rotação $[R_\theta]$ em relação à base canônica.
- (c) Considere a *base girada* $B_\theta = \{R_\theta(\mathbf{e}_1), R_\theta(\mathbf{e}_2)\}$. Quais as coordenadas de um vetor (a, b) , após ser transformado por R_θ na base canônica e na base girada B_θ ?
- (d) Calcule a matriz de rotação por um ângulo $-\theta$. Verifique que $R_{-\theta}$ é a *matriz inversa* de R_θ . O que isso significa?
23. Escreva a matriz do operador $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que escala (amplia/reduz) um sólido de maneira uniforme por um fator λ .
24. Mostre que o operador de rotação da questão 22 é unitário (isometria).
25. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador de reflexão no plano xy , dado por $T(x, y, z) = (x, y, -z)$. O operador T é unitário? Obtenha o operador inverso T^{-1} .

[Nota 4] Considere θ um parâmetro dado e fixo, deixando as expressões em função de θ .