

Lista de exercícios

Revisão 2.1 — Transformações lineares

Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega 27/05/2023

Esta lista se refere ao conteúdo das aulas

- Aula 11 [Transformações](#)
- Aula 12 [Transformações lineares](#)
- Aula 13 [Núcleo e Imagem](#)
- Aula 14 [Álgebra de Transformações lineares](#)

Verifique as [instruções sobre a atividade na página da disciplina](#). Envie as resoluções das questões pedidas na página de instruções pelo [Formulário do Google](#).

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada pela expressão

$$T(x, y) = (x - y, 5y - 3x)$$

- (a) Calcule $T(1, 0)$.
 - (b) Calcule $T(0, 1)$.
 - (c) Calcule $T(2(1, 0) - (0, 1))$.
 - (d) Calcule $T(2, -1)$.
 - (e) Calcule $T(a + b, a - b)$.
 - (f) Para quais valores de α e β temos $T(\alpha, \beta) = (5, -3)$? Você terá que calcular a expressão para $T(\alpha, \beta)$, igualar a $(5, -3)$ e resolver o sistema linear para obter α e β . Com isso você calculou a transformação inversa: $T^{-1}(5, -3) = (\alpha, \beta)$.
 - (g) Faça o mesmo procedimento do item anterior, mas a fim de obter a expressão geral $T^{-1}(x, y)$.
 - (h) Calcule $T^{-1}(37, 42)$.
2. Considere a transformação linear $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, que leva um vetor do $\mathbb{R}^3$ a um polinômio de grau ≤ 2 . A transformação é dada pela expressão

$$F(x, y, z) = x + yt + zt^2$$

- (a) Calcule $F(1, 0, 0)$, $F(0, 1, 0)$ e $F(0, 0, 1)$.
- (b) Calcule $F(2(1, 0, 0) - (0, 1, 0) + 3(0, 0, 1))$.
- (c) Calcule $F(2, -1, 3)$.
- (d) Calcule $F(x_0, v_0, \frac{g}{2})$.
- (e) Para quais valores de α , β e γ temos $F(\alpha, \beta, \gamma) = 1 - 2t + t^2$?

Com isso, você calculou a transformação inversa $F^{-1}(1 - 2t + t^2) = (\alpha, \beta, \gamma)$. Note que essa inversa, $F^{-1} : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, leva um polinômio a um vetor do $\mathbb{R}^3$.

- (f) Faça o mesmo procedimento do item anterior, mas a fim de obter a expressão geral $F^{-1}(a + bt + ct^2)$.
3. Considere a transformação linear $G : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, que leva um polinômio de grau ≤ 2 a um vetor do $\mathbb{R}^3$. A transformação é dada pela expressão

$$G(a + bt + ct^2) = (a + b, b - c, c + a)$$

- (a) Calcule $G(1)$, $G(t)$, $G(t^2)$.
 - (b) Calcule $G(1 + t - \frac{1}{2}t^2)$
 - (c) Calcule $G(x + 2yt - 3zt^2)$
4. Considere a transformação linear $C : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{3 \times 1}$, que um vetor do $\mathbb{R}^3$ a uma matriz coluna 3×1 . A transformação é dada pela expressão

$$C(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- (a) Onde você já viu essa operação?
 - (b) Calcule $C(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$ e $C(0, 0, 1)$.
 - (c) Calcule $C(2(1, 0, 0) - (0, 1, 0) + 3(0, 0, 1))$.
 - (d) Calcule $C(2, -1, 3)$.
 - (e) Calcule $C(a + b, c - a, b + c)$.
 - (f) Obtenha uma base e a dimensão do núcleo dessa transformação. Ela é injetora?
 - (g) Obtenha uma base e a dimensão da imagem dessa transformação. Ela é sobrejetora?
 - (h) Ela é bijetora? Se sim, os espaços $\mathbb{R}^2$ e $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ são isomorfos!
5. Considere a transformação linear $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, ao atuar sobre os vetores da base canônica, resultam em

$$F(\mathbf{e}_1) = F(1, 0, 0) = (-1, 2, 1)$$

$$F(\mathbf{e}_2) = F(0, 1, 0) = (0, 1, -1)$$

$$F(\mathbf{e}_3) = F(0, 0, 1) = (1, -1, 0)$$

- (a) Calcule $F(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3)$
- (b) Calcule $F(-1, 2, 3)$

- (c) Calcule $F(x, y, z)$
 (d) Obtenha uma base para a imagem de F .

6. QUESTÃO COM ERRO DE DIGITAÇÃO. FAVOR IGNORAR E MANTER A NUMERAÇÃO

7. Obtenha uma base e a dimensão do núcleo e da imagem das seguintes transformações lineares. Verifique se são injetoras, sobrejetoras, isomorfismos:

- (a) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $F(x, y, z) = (z, x + y)$
 (b) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, a projeção no plano xy , dada por $F(x, y, z) = (x, y, 0)$.
 (c) $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde

$$F(x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t)$$

- (d) $R_\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que rotaciona um vetor em torno do eixo z perfazendo um ângulo θ :

$$R_\theta(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$$

- (e) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{F}$ [Nota 1], onde $F(x, y) = xe^t + ye^{2t}$
 (f) $D : P_5(\mathbb{R}) \rightarrow P_5(\mathbb{R})$, onde $D(f) = f''$

8. Considere a seguinte transformação de $C^1(\mathbb{R})$ [Nota 2] em $C(\mathbb{R})$ (espaço vetorial de funções contínuas nos reais):

$$D(f(t)) = \frac{df}{dt}$$

- (a) Calcule $D(0)$
 (b) Calcule $D(\cos(t))$
 (c) Calcule $D(\cos(t) + 3t^2 - 2t + 1)$
 (d) D é linear?
 (e) D é injetora?

9. Repita os itens da questão anterior para as seguintes transformações:

- (a) $D(f) = \frac{d^2 f}{dt^2}$
 (b) $D(f) = m \frac{d^2 f}{dt^2} + kf$, com m e k constantes positivas arbitrárias
 (c) $D(f) = \int_0^x f(t) dt$

10. Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ e seja $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(z) = \bar{z}$. Mostre que F é um operador linear. Se tivéssemos considerado o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, F ainda seria um operador linear?

[Nota 1] $\mathcal{F}$ é o subespaço vetorial das funções contínuas gerado pelos vetores $\{1, e^t, e^{2t}, \dots\}$

[Nota 2] $C^1(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial das funções reais que têm derivada contínua

11. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformações lineares definidas por

$$F(x, y, z) = (x + y, z)$$

$$G(x, y, z) = (x, y - z)$$

- (a) Calcule $(F + G)(v)$, com $v = (2, 3, 4)$.
- (b) Obtenha uma expressão para a transformação $F + G$
- (c) Calcule $(2F - 3G)(v)$, com $v = (2, 3, 4)$.
- (d) Obtenha uma expressão para a transformação $2F - 3G$

12. Sejam $S : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ e $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ transformações lineares definidas por

$$S(a + bt + ct^2) = (a + b) + (a - b + c)t + (b - c)t^2$$

$$T(a + bt + ct^2) = (a - c) + (b + c)t + (b + c)t^2$$

- (a) Calcule $(S + T)(v)$, com $v = 2 - t + 3t^2$.
- (b) Obtenha uma expressão para a transformação $S + T$
- (c) Calcule $(3S - 5T)(v)$, com $v = 2 - t + 3t^2$
- (d) Obtenha uma expressão para a transformação $3S - 5T$

13. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformações lineares dadas por

$$F(x, y, z) = (y, x + z)$$

$$G(x, y, z) = (2z, x - y)$$

$$H(x, y) = (y, 2x)$$

Considere os vetores $v = (4, -1, 5)$ e $w = (3, 4, 1)$.

- (a) Calcule $(F + G)(v)$ e $(F + G)(w)$
- (b) Obtenha uma expressão para $F + G$.
- (c) Calcule $(H \circ F)(v)$ e $(H \circ F)(w)$.
- (d) Obtenha uma expressão para $H \circ F$.
- (e) Calcule $(H \circ G)(v)$ e $(H \circ G)(w)$.
- (f) Obtenha uma expressão para $H \circ G$.
- (g) Obtenha uma expressão para $H \circ (F + G)$.
- (h) Obtenha uma expressão para $H \circ F + H \circ G$. Compare com o item anterior.
- (i) Obtenha uma expressão para $H^2 = H \circ H$.

14. Sejam $F : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$, $G : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ e $H : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ transformações lineares dadas por

$$F(a + bt + ct^2) = b + (a + c)t$$

$$G(a + bt + ct^2) = 2c + (a - b)t$$

$$H(a + bt) = b + 2at$$

Considere os vetores $v = 4 - t + 5t^2$ e $w = 3 + 4t + t^2$.

- (a) Calcule $(F + G)(\boldsymbol{v})$ e $(F + G)(\boldsymbol{w})$.
- (b) Obtenha uma expressão para $F + G$.
- (c) Calcule $(H \circ F)(\boldsymbol{v})$ e $(H \circ F)(\boldsymbol{w})$.
- (d) Obtenha uma expressão para $H \circ F$.
- (e) Calcule $(H \circ G)(\boldsymbol{v})$ e $(H \circ G)(\boldsymbol{w})$.
- (f) Obtenha uma expressão para $H \circ G$.
- (g) Obtenha uma expressão para $H \circ (F + G)$.
- (h) Obtenha uma expressão para $H \circ F + H \circ G$. Compare com o item anterior.
- (i) Obtenha uma expressão para $H^2 = H \circ H$.

15. Seja $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ base canônica do $\mathbb{R}^3$. Se $F \in L(\mathbb{R}^3)$ é o operador tal que

$$F(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_2$$

$$F(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_3$$

$$F(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1,$$

- (a) determine $F(x, y, z)$
 - (b) e mostre que $F^3 = \mathbb{I}$ e, portanto, $F^2 = F^{-1}$. [Nota 3]
 - (c) Obtenha uma expressão para F^{100} .
16. Mostre que o operador $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ projeção sobre o plano xy , dado por $F(x, y, z) = (x, y, 0)$, é idempotente, ou seja $F^2 = F$.
17. Mostre que o operador $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (y + z, z, 0)$, é nilpotente, ou seja, existe uma potência n de F tal que $F^n = \mathbf{0}$, o operador nulo.
18. Mostre que o operador derivação no espaço $P_n(\mathbb{R})$ é nilpotente.

[Nota 3] $\mathbb{I}$ é o operador identidade: $\mathbb{I}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$