

Lista de exercícios

Revisão 1.3 — Produto interno

Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega 06/05/2023

Esta lista se refere ao conteúdo das aulas

- Aula 7 **Produto interno**
 - Aula 8 **Norma e Ortogonalidade**
 - Aula 9 **Bases Ortonormais**
 - Aula 10 **Método dos mínimos quadrados**
1. Verifique quais dos 4 axiomas de produto interno são satisfeitas pelas seguintes operações sobre os vetores $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$:
 - (a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$
 - (b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \prod_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots u_n v_n$
 - (c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i v_i$, onde α_i são constantes arbitrárias.
 - (d) Caso $\mathbb{R}^3$:
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + u_1 v_3 - 5u_2 v_1 - u_2 v_2 + u_2 v_3 - u_3 v_1 - 2u_3 v_2 + u_3 v_3$$
 2. Considere $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vetores de um espaço vetorial V sobre os $\mathbb{R}$, dotado de produto interno. Escreva as expressões abaixo em termos de $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ e $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$.
 - (a) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$
 - (b) $\langle 2\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle$
 - (c) $\langle 5\mathbf{v} + 3\mathbf{w}, \mathbf{u} - 6\mathbf{v} + 4\mathbf{w} \rangle$
 - (d) $\|2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\|^2$
 3. Calcule o valor dos produtos internos da questão 2, considerando: $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = (1, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 0)$, $\mathbf{w} = (3, 6)$ e o produto interno usual.

4. Calcule o valor dos produtos internos da questão 2, considerando: $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = (1, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 0)$, $\mathbf{w} = (3, 6)$ e o produto interno dado por

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = u_1 v_1 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + 3u_2 v_2.$$

5. Calcule o valor dos produtos internos da questão 2, considerando: $V = P_1(\mathbb{R})$, $\mathbf{u} = 1 - t$, $\mathbf{v} = 1$, $\mathbf{w} = 3 + 6t$ e o produto interno dado por

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \int_{-1}^1 u(t)v(t) dt$$

6. Seja $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes 2×2 reais com o produto interno dado por

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(B^T A),$$

onde $\text{Tr}(A)$ é o traço da matriz A e B^T é a transposta da matriz B .

(a) Obtenha uma expressão para $\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle$

(b) Mostre que a base canônica desse espaço, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, é ortonormal.

7. Mostre que a base canônica de $\mathbb{R}^3$ é ortonormal em relação ao produto interno usual, mas não é ortonormal em relação ao produto interno da questão 1(d).
8. No espaço $\mathbb{R}^2$ com produto interno usual, utilize o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal partindo dos vetores $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$ e $\mathbf{u}_2 = (1, 2)$.
9. No espaço $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual, utilize o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal partindo dos vetores $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$.

10. No espaço $P_2(\mathbb{R})$ com produto interno dado por

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \int_{-1}^1 u(t)v(t) dt,$$

utilize o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal partindo dos vetores $\mathbf{u}_1 = 1$, $\mathbf{u}_2 = t$ e $\mathbf{u}_3 = t^2$.

11. Utilize o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal para o espaço da questão 6 a partir do conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

12. Deixa-se cair um objeto de uma altura h e mede-se sua altura em 8 instantes ao longo da queda livre. Os dados se encontram na tabela abaixo.

Instante (s)	0.00	0.09	0.17	0.26	0.34	0.43	0.51	0.60
Altura (m)	2.01	1.95	1.88	1.68	1.44	1.08	0.67	0.22

Sabendo que um corpo em queda livre sob aceleração da gravidade g , solto de uma altura h_0 a uma velocidade inicial v_0 tem sua altura no instante t dada por $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, responda, com base no melhor ajuste aos dados:

- (a) Qual a aceleração da gravidade a que esse objeto está sujeito?
- (b) De qual altura ele foi solto?
- (c) É razoável dizer que o objeto foi solto a partir do repouso? Por quê?
- (d) Utilize seu software favorito para fazer um gráfico desses pontos e da função ajustada.
- (e) O resultado é compatível com o que você esperava?