

Lista de exercícios

Fixação 1.2

Dependência Linear, Bases e Coordenadas

Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega: Quarta-feira 26/04/2023

Esta lista se refere ao conteúdo das aulas

- Aula 4 **Dependência linear**
- Aula 5 **Bases e dimensão**
- Aula 6 **Coordenadas**

1. Verifique se os seguintes conjuntos de vetores de $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes:
 - (a) $(3, -1, 2), (5, 1, -1)$
 - (b) $(2, -4, 6), (-1, 2, -3)$
 - (c) $(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (1, 1, 1), (-1, 1, -1)$
 - (d) $(0, 1, 2), (1, 2, 2), (-1, 1, 1)$
2. Verifique se os seguintes conjuntos de vetores de $P(\mathbb{R})$ são linearmente dependentes:
 - (a) $\mathbf{p} = 3 - t + 2t^3, \mathbf{q} = 5 + t - t^3$
 - (b) $\mathbf{p} = -1 + 2t - 3t^2, \mathbf{q} = 2 - 4t + 6t^2$
 - (c) $\mathbf{p} = 1, \mathbf{q} = -1 + t, \mathbf{r} = 1 + t + t^2, \mathbf{s} = -1 + t - t^2$
 - (d) $\mathbf{p} = t^3 + t^5, \mathbf{q} = t + 2t^3 + 2t^5, \mathbf{r} = -t + t^3 + t^5$
3. Mostre que o conjunto $B = \{(1, -1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.
4. Obtenha $[I]_C^B$, a matriz mudança de base da base B do exercício anterior para a base canônica $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Obtenha em seguida $[I]_B^C$. Mostre que $[I]_C^B = \left([I]_B^C\right)^{-1}$.
5. Mostre que o conjunto $B = \{1 - t, 1 + t + t^2, 1 + t^2\}$ é uma base do $P_2(\mathbb{R})$. Obtenha uma base para o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ tais que $p(0) = 0$.
6. Obtenha $[I]_C^B$, a matriz mudança de base da base B do exercício anterior para a base canônica $C = \{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{R}^3$. Obtenha em seguida $[I]_B^C$. Mostre que $[I]_C^B = \left([I]_B^C\right)^{-1}$.

7. Obtenha uma base para o conjunto de vetores (x, y, z) do $\mathbb{R}^3$ tais que $x + 2y + z = 0$. Qual a dimensão desse subespaço?
8. Mostre que o conjunto $\{1, \sin(t), \sin(2t)\}$ de vetores de $C(\mathbb{R})$ é linearmente independente.
9. Obtenha uma base para o subespaço das funções contínuas gerado por $\{\sin(t), \sin(2t), \sin(t) \cos(t)\}$. Qual a dimensão desse espaço?
10. Quando uma massa m é pendurada na ponta de uma mola e essa massa é puxada para baixo e solta, o sistema massa-mola começará a oscilar. O deslocamento y da massa em relação à sua posição de repouso é dada por uma função da forma

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t),$$

onde ω é uma constante que depende da massa e da mola.

Mostre que o conjunto de todas as funções descritas acima forma um espaço vetorial sobre os reais (com adição e multiplicação usual das funções). [Nota 1]

^[Nota 1] Dica: na questão ??(??) nós mostramos que o conjunto das funções reais é um espaço vetorial e as funções $y(t)$ são... funções a valores reais!