Lista de exercícios
Fixação 1.1 — Espaços vetoriais
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega: 12/04/2023

Esta lista se refere ao conteúdo das aulas

- Aula 1 Espaços vetoriais
- Aula 2 Subespaços vetoriais
- Aula 3 Combinações lineares e espaços gerados

1. Para que um conjunto, associado a um corpo e as operações de *adição* entre seus elementos e *multiplicação* de seus elementos e um escalar, seja considerado um espaço vetorial, deve satisfazer aos 10 axiomas. Verifique que os conjuntos abaixo, com as operações dadas, são espaços vetoriais, verificando a validade de cada axioma.

   (a) O conjunto das funções a valores reais.

   Escalares $\alpha \in \mathbb{R}$
   Adição $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$.
   Multiplicação por escalar $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$

   (b) $P_n(\mathbb{R})$, o conjunto dos polinômios[Nota 1] de grau $\leqslant n$ a valores reais:

   $$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

   Escalares $\alpha \in \mathbb{R}$
   Adição $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$.
   Multiplicação por escalar $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$

   (c) (Desafio) $\mathbb{C}^2$, o conjunto das duplas ordenadas (x_1, x_2) de números complexos, com

   Escalares $\alpha \in \mathbb{C}$
   Adição $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
   Multiplicação por escalar $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$

   (d) (Desafio) $\mathbb{K}^n$, o conjunto das n-uplas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de escalares x_i do corpo K, um corpo qualquer.

[Nota 1] Dica: todo polinômio é uma função.

Escalares $\alpha \in \mathbb{K}$
Adição $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
Multiplicação por escalar $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$

2. Seja H o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ no exterior e na borda do círculo unitário. Ou seja, $H = \left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 \geqslant 1\right\}$. Obtenha um exemplo específico — dois vetores ou um vetor e um escalar — para mostrar que H não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

3. Quais conjuntos abaixo são subespaços do espaço vetorial $P(\mathbb{R})$? Justifique.
   (a) Os polinômios da forma $p(t) = at^3$ com $a \in \mathbb{R}$.
   (b) Os polinômios da forma $p(t) = a + t^2$ com $a \in \mathbb{R}$.
   (c) Os polinômios de grau $\leqslant 3$ com coeficientes inteiros.
   (d) Todos os polinômios em $P(\mathbb{R})$ tais que $p(0) = 0$.

4. Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0) & \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0) & \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1) \\ \boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0) & \boldsymbol{v}_2 = (1, -1, 1) & \boldsymbol{v}_3 = (1, 0, -1). \end{array}$$
   Escreva as seguintes combinações lineares:
   (a) $2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$
   (b) $2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$
   (c) $-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$
   (d) $-\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$

5. Escreva os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$ como combinações lineares dos vetores $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$:
   (a) $(2, -1, 3)$
   (b) $(1, 1, 1)$
   (c) $(-1, 0, 1)$

6. Escreva os vetores da questão anterior como combinação linear dos vetores $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, -1, 1)$ e $\boldsymbol{v}_3 = (1, 0, -1)$

7. Considere os vetores de $P_2(\mathbb{R})$:
$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{e}_1 = 1 & \boldsymbol{e}_2 = t & \boldsymbol{e}_3 = t^2 \\ \boldsymbol{v}_1 = 1 + t & \boldsymbol{v}_2 = 1 - t + t^2 & \boldsymbol{v}_3 = 1 - t^2. \end{array}$$
   Escreva as seguintes combinações lineares:
   (a) $2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$
   (b) $2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$
   (c) $-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$
   (d) $-\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$

8. Escreva os seguintes vetores de $P_2(\mathbb{R})$ como combinações lineares dos vetores $\boldsymbol{e}_1 = 1$, $\boldsymbol{e}_2 = t$, $\boldsymbol{e}_3 = t^2$:

(a) $2 - t + 3t^2$ (b) $1 + t + t^2$ (c) $-1 + t^2$

9. Escreva os vetores da questão anterior como combinação linear dos vetores $\boldsymbol{v}_1 = 1 + t$, $\boldsymbol{v}_2 = 1 - t + t^2$ e $\boldsymbol{v}_3 = 1 - t^2$

10. Verifique se o vetor $\boldsymbol{w} = (9, -4, -4, 7)$ está no subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por

$$\{\boldsymbol{v}_1 = (8, -4, -3, 9), \boldsymbol{v}_2 = (-4, 3, -2, -8), \boldsymbol{v}_3 = (-7, 6, -5, -18)\}$$

Desafios

As questões abaixo não são necessárias para obter a pontuação completa da lista, entretanto contam como bônus além do valor total.

11. Para que um conjunto, juntamente com operações de *adição* e *multiplicação* entre seus elementos, seja considerado um corpo, deve satisfazer a 11 axiomas. Verifique que os conjuntos abaixo, com as operações dadas, são corpos, verificando a validade de cada axioma.
    (a) Os números reais, com a adição e multiplicação usuais.
    (b) Os números racionais $\mathbb{Q}$, com a adição e a multiplicação usuais.
    (c) Os pares ordenados de números reais (x, y) e as seguintes operações:
    Adição $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
    Multiplicação $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$
    (d) Os números complexos, com adição e multiplicação usuais.
    (e) Os números inteiros $\{0, 1, \ldots, p - 1\}$ e as seguintes operações:
    Adição $x + y = ((x + y) \mod p)$ onde $a \mod p$ é o *resto* da divisão $a \div p$.
    Multiplicação $xy = ((xy) \mod p)$.

12. Mostre que o conjunto dos vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ soluções do sistema de equações abaixo é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$