Lista de exercícios
Aula 21 – Diagonalização de sistemas de equações diferenciais
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

1. Considere o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{-k}{m}x + \dfrac{k}{m}(y-x) \\ \ddot{y} = \dfrac{-k}{m}(y-x) + \dfrac{-k}{m}y \end{cases}$$

   (a) Escreva o sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

   (b) Obtenha os autovalores λ_1, λ_2 e autovetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ de A.

   (c) Escreva a equação na forma diagonal:

$$\begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \text{ onde } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = p\boldsymbol{v}_1 + q\boldsymbol{v}_2$$

   (d) Escreva a solução para $p(t)$ e $q(t)$, lembrando que qualquer combinação linear de $\operatorname{sen}(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ é autovetor do operador $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$ com autovalor $-\omega^2$. Considere como condições iniciais:

$$\begin{cases} x(t=0) & = 0 \\ \dot{x}(t=0) & = 0 \\ y(t=0) & = 1 \\ \dot{y}(t=0) & = 0 \end{cases}$$

2. Resolva o sistema $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{u}(t)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ sujeito à condição inicial $\boldsymbol{u}(t=0) = (0, 1)$.

3. Resolva o sistema $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{u}(t)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sujeito à condição inicial $\boldsymbol{u}(t=0) = (0, 1, -1)$.