

# Lista de exercícios

## Aula 20 – Diagonalização

### Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho – ECT – UFRN

1. Lembrando que uma matriz diagonalizável  $A$  é semelhante a uma matriz diagonal  $D$ , mostre que o determinante de  $A$  é igual ao produto de seus autovalores. (DICA:  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ )
2. Mostre que o traço de uma matriz diagonalizável é a soma de seus autovalores.
3. Sejam a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ :  $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ , a base  $C = \{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  e o operador linear  $T \in L(\mathbb{R}^3)$  dado por

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Encontre o polinômio característico de  $T$ , os autovalores de  $T$  e os autovetores correspondentes.
  - (b) Encontre  $[T]_C$  e o polinômio característico. O que você pode dizer a respeito dele?
  - (c) Encontre uma base  $D$  de  $\mathbb{R}^3$ , se possível, tal que  $[T]_D$  seja diagonal. Escreva a matriz  $M$  tal que  $[T]_D = M^{-1} [T]_B M$ .
4. Seja  $A \in L(\mathbb{R}^3)$  o operador linear cuja matriz relativa à base canônica é

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Obtenha os autovalores e autovetores de  $A$ .
  - (b) Mostre que existe uma base  $B$  de  $\mathbb{R}^3$ , ortonormal, formada por autovetores de  $A$ .
  - (c) Escreva a matriz mudança de base da base de autovetores de  $A$  para a base canônica. Verifique que é uma matriz ortogonal  $M^{-1} = M^t$ .
  - (d) Mostre que  $[A]_B = M^t [A] M$ .
5. POTÊNCIAS DE MATRIZES: Seja a matriz  $A$  diagonalizável, com autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  e  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  os respectivos autovetores. Nesse caso, a matriz dos autovalores<sup>[\*]</sup>

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

será semelhante a  $A$ , pois existe uma matriz  $M$  de mudança de base tal que  $A = M^{-1} \Lambda M$ .

- (a) Mostre que  $A^2 = M^{-1} \Lambda^2 M$
- (b) Mostre que os autovalores de  $A^2$  são  $(\lambda_1)^2, (\lambda_2)^2, \dots, (\lambda_n)^2$  e  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  os respectivos autovetores.
- (c) Mostre que  $A^k = M^{-1} \Lambda^k M$
- (d) Mostre que os autovalores de  $A^k$  são  $(\lambda_1)^k, (\lambda_2)^k, \dots, (\lambda_n)^k$  e  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  os respectivos autovetores.
- (e) Mostre que  $A^k \mathbf{u} = \alpha_1 (\lambda_1)^k \mathbf{u}_1 + \alpha_2 (\lambda_2)^k \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n (\lambda_n)^k \mathbf{u}_n$  se  $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n$ . Ou seja, para calcular  $k$  aplicações consecutivas de um operador  $A$  sobre um vetor  $\mathbf{u}$ , basta decompor  $\mathbf{u}$  na base dos autovetores de  $A$  e multiplicar cada componente pela potência do respectivo autovalor:  $(\lambda_i)^k$ .

---

<sup>[\*]</sup>  $\Lambda$  é a letra grega lambda ( $\lambda$ ), maiúscula.