Lista de exercícios
Aula 13 – Núcleo e Imagem
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

1. Mostre que, se $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear,
   (a) $\text{Im}(T)$ é um subespaço de W.
   (b) $\ker(T)$ é um subespaço de V.

2. Dados $F : V \longrightarrow W$ transformação linear injetora e $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ vetores L.I. em V, mostre que $\{T(\boldsymbol{u}_1), \ldots, T(\boldsymbol{u}_k)\}$ é L.I.

3. A transformação $T : M_{2\times2} \longrightarrow M_{2\times2}$ que leva toda matriz à sua transposta é definitivamente linear. Quais dessas propriedades são verdadeiras? Justifique.
   (a) T^2 dado por $T^2(M) = T(T(M))$ é a transformação identidade.
   (b) O núcleo de T contém apenas a matriz nula.
   (c) Todas as matrizes 2×2 estão na imagem de T.
   (d) $T(M) = -M$ é impossível.

4. Seja $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $F(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z)$.
   (a) Obtenha uma base e a dimensão de $\ker(F)$
   (b) Obtenha uma base e a dimensão de $\text{Im}(F)$

5. Refaça o exercício anterior, agora para:
   (a) $F : V \longrightarrow V$, onde V é um espaço vetorial finitamente gerado qualquer e $F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$, a transformação nula.
   (b) $F : V \longrightarrow V$, onde V é um espaço vetorial finitamente gerado qualquer e $F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$, a transformação identidade.
   (c) $F : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ dada por $D(p(t)) = p'(t)$
   (d) $F : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ dada por $F(p(t)) = p(t) + t^2 p'(t)$

6. Mostre que $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $F(x, y, z) = (x, x - y, y - z, z)$ é injetora mas não é isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$.

7. Mostre que o $\mathbb{R}^2$ é isomorfo ao subespaço $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$ do $\mathbb{R}^3$. (Sugestão: encontre uma transformação linear bijetora entre esses espaços)