Lista de exercícios
Aula 11 – Transformações
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

1. Considere a seguinte transformação de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$:

$$F(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$$

   (a) Calcule $F(0, 0, 0)$
   (b) Calcule $F(1, 5, -2)$
   (c) Calcule $F(1 + 3, 5 - 1, -2 + 8)$
   (d) Calcule $F(a, b, c)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   Sejam $\boldsymbol{u} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar:

   (e) Escreva o vetor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$
   (f) Calcule $F(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$
   (g) Calcule $F(\boldsymbol{u}) + F(\boldsymbol{v})$
   (h) Escreva o vetor $\lambda\boldsymbol{u}$
   (i) Calcule $F(\lambda\boldsymbol{u})$
   (j) Calcule $\lambda F(\boldsymbol{u})$

2. Repita os itens da questão anterior para as seguintes transformações:
   (a) $F(x, y, z) = (x^2 + y^2, y, z^2)$
   (b) $F(x, y, z) = (-x, -y, -z)$
   (c) $F(x, y, z) = (2x + 3, y - 5, 3z + 2x - y)$

3. Considere a seguinte transformação de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ em $M_{2\times2}(\mathbb{R})$:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

   (a) Calcule $T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$
   (b) Calcule $T\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)$

(c) Calcule $T\left(\begin{bmatrix} 2+5 & -1+3 \\ 0-2 & 3+1 \end{bmatrix}\right)$

(d) Calcule $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right)$, com $x, y, z, w \in \mathbb{R}$.

Sejam $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar:

(e) Escreva o vetor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$

(f) Calcule $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$

(g) Calcule $T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$

(h) Escreva o vetor $\lambda \boldsymbol{u}$

(i) Calcule $T(\lambda \boldsymbol{u})$

(j) Calcule $\lambda T(\boldsymbol{u})$

4. Repita os itens da questão anterior para as seguintes transformações:

(a) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+3c & b-2d \\ c+d & -2a+5d \end{bmatrix}$

(b) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ac & bd \\ cd & ad \end{bmatrix}$

(c) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Considere a seguinte transformação de $P_3(\mathbb{R})$ em $P_3(\mathbb{R})$:

$$F\left(a + bt + ct^2 + dt^3\right) = (2a + b) + (b - 3c)t + dt^2 - ct^3$$

(a) Calcule $F(0)$

(b) Calcule $F(1 + t^2)$

(c) Calcule $F((1+4) + (0+2)t + (1-3)t^2 + (0-1)t^3)$

(d) Calcule $F(x + yt + zt^2 + wt^3)$, com $x, y, z, w \in \mathbb{R}$.

Sejam $\boldsymbol{u} = a + bt + ct^2 + dt^3$ e $\boldsymbol{v} = x + yt + zt^3$ vetores de $P_3(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar:

(e) Escreva o vetor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$

(f) Calcule $F(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$

(g) Calcule $F(\boldsymbol{u}) + F(\boldsymbol{v})$

(h) Escreva o vetor $\lambda \boldsymbol{u}$

(i) Calcule $F(\lambda \boldsymbol{u})$

(j) Calcule $\lambda F(\boldsymbol{u})$

6. Repita os itens da questão anterior para as seguintes transformações:

(a) $F\left(a + bt + ct^2 + dt^3\right) = b + 2ct + 3dt^2$

(b) $F(f(t)) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$

(c) $F\left(a + bt + ct^2 + dt^3\right) = a^2 + b^2t + c^2t^2 + d^2t^3$

(d) $F(f) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

7. Considere a seguinte transformação de $C^1(\mathbb{R})$ (espaço vetorial das funções reais que têm derivada contínua) em $C(\mathbb{R})$ (espaço vetorial de funções contínuas nos reais):

$$D\left(f(t)\right) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

(a) Calcule $D(0)$

(b) Calcule $D(\cos(t))$

(c) Calcule $D(\cos(t) + 3t^2 - 2t + 1)$

Sejam $\boldsymbol{u} = f(t)$ e $\boldsymbol{v} = g(t)$ funções arbitrárias, vetores de $C^1(\mathbb{R})$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar:

(d) Escreva o vetor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$

(e) Calcule $D(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$

(f) Calcule $D(\boldsymbol{u}) + D(\boldsymbol{v})$

(g) Escreva o vetor $\lambda\boldsymbol{u}$

(h) Calcule $D(\lambda\boldsymbol{u})$

(i) Calcule $\lambda D(\boldsymbol{u})$

8. Repita os itens da questão anterior para as seguintes transformações:

(a) $D(f) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$

(b) $D(f) = m\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + kf$, com m e k constantes arbitrárias

(c) $D(f) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$