

Lista de exercícios

Aula 09 – Bases ortogonais

Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho – ECT – UFRN

1. Mostre que a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$, $B = \{1, t, t^2\}$, não é ortonormal em relação ao produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

2. Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, com $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Considerando o produto interno

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 - u_1v_2 - u_2v_1,$$

- (a) Determinar m a fim de que os vetores $(1 + m, 2)$ e $(3, m - 1)$ sejam ortogonais.
(b) Determinar todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ ortogonais a $(2, 1)$.
(c) Determinar todos os vetores da forma $(m, m - 1)$ de norma igual a 1.
3. Ortonormalize a base $B = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (-1, 0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ pelo processo de Gram-Schmidt considerando o produto interno usual.
4. Utilize os coeficientes de Fourier para obter as coordenadas dos seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$ em relação à base obtida na questão 3:

(a) $(1, 1, 1)$

(c) $(-1, 0, 1)$

(e) $(0, 1, 0)$

(b) $(1, -1, 1)$

(d) $(1, 0, 0)$

(f) $(0, 0, 1)$

5. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ vetores de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, o espaço vetorial das matrizes reais 2×2 . Considerando o produto interno

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{tr}(\mathbf{B}^t \mathbf{A}),$$

obtenha, pelo processo de Gram-Schmidt, uma base ortonormal a partir da base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

NOTA: $\text{tr}(\mathbf{A})$ é o traço da matriz $\mathbf{A}$, ou seja, a soma dos elementos da diagonal. $\mathbf{B}^t$ é a transposta da matriz $\mathbf{B}$.

SUGESTÃO: Escreva o produto interno $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ em função dos elementos a_{ij} e b_{ij} das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ antes de sair fazendo contas alucinadamente.

6. Considere a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$: $B = \{1, x, x^2\}$. Construa, a partir dela, uma base ortonormal pelo processo de Gram-Schmidt considerando o seguinte produto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

Esses polinômios são os polinômios de Legendre e descrevem as formas dos orbitais atômicos s , p , $d \dots$ na descrição quântica do átomo de hidrogênio. Eles também descrevem os chamados multipolos elétricos, importantes para modelar sinais emitidos de uma fonte pontual, como uma antena.