# Lista de exercícios
# Aula 08 – Norma e Ortogonalidade
# Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

1. Demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz para espaços euclidianos reais:

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|$$

   DICA: Vide Callioli 6.2: Proposição 2 ou Boldrini: 8.3.1: propriedade *iii)*

2. Sejam $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ vetores de um espaço euclidiano tais que $\|\boldsymbol{v}\| = 1$, $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ e $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| = 2$. Determine $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.

3. Seja $V$ um espaço euclidiano real. Dados $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$, com $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ e $k = \dfrac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$, mostre que $\boldsymbol{u} - k\boldsymbol{v}$ é ortogonal a $\boldsymbol{v}$. O vetor $\dfrac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v}$ é chamado de *projeção de $\boldsymbol{u}$ sobre $\boldsymbol{v}$* e é representado por $\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})$.

4. No espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$, com o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, \mathrm{d}t,$$

   calcule $\langle f, g \rangle$, $\|f\|$, $\|g\|$ e $\|f + g\|$ nos seguintes casos:

   (a) $f(t) = t^2 - t - 1$ e $g(t) = t^2 + 1$

   (b) $f(t) = 2$ e $g(t) = t^3 + t + 1$

5. Encontre a distância de $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ e o cosseno do ângulo entre eles nos seguintes casos:

   (a) $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1, 1)$ e $\boldsymbol{v} = (0, 0, 1, 1)$ com o produto interno usual do $\mathbb{R}^4$.

   (b) $\boldsymbol{u} = 1 + t - t^2$ e $\boldsymbol{v} = 3t^2$ com o produto interno do exercício 4.

   (c) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ com o produto interno dado por $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^t A)$, onde $\operatorname{tr}(A)$ é o traço da matriz $A$ e $B^t$ é a transposta da matriz $B$.