

Lista de exercícios

Aula 07 – Produto Interno

Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

1. Considerando o espaço euclidiano¹ $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, calcule $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ nos seguintes casos:

(a) $\mathbf{u} = (\frac{1}{2}, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = (4, 1, -3)$

(c) $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$

(b) $\mathbf{u} = (2, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (4, 0, 2)$

2. Mostre que, em um espaço euclidiano complexo, todo produto interno tem as seguintes propriedades:

(a) $\langle \alpha \mathbf{u}, \beta \mathbf{v} \rangle = \bar{\alpha} \beta \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

(b) $\langle \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \bar{\beta} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

3. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ vetores arbitrários de $\mathbb{C}^n$. Verifique se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, definido em cada item abaixo, é um produto interno em $\mathbb{C}^n$. Em caso negativo, enumere os axiomas que não são verificados.

(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i |v_i|$

(d) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

(b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \left| \sum_{i=1}^n u_i v_i \right|$

(e) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2 - \sum_{i=1}^n u_i^2 - \sum_{i=1}^n v_i^2$

(c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n v_j$

NOTA: para $v_i \in \mathbb{C}$, $|v_i| = \sqrt{\bar{v}_i v_i}$.

4. Usando o produto interno $\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ em $P_2(\mathbb{R})$, calcule o produto interno entre:

(a) $f(t) = t$ e $g(t) = 1 - t^2$

(b) $f(t) = t - \frac{1}{2}$ e $g(t) = \frac{1}{2} - (t - \frac{1}{2})$.

5. No espaço vetorial real $C([1, e])$, das funções contínuas no intervalo $[1, e]$ e produto interno dado por:

$$\langle f, g \rangle = \int_1^e (\ln t) f(t)g(t) dt,$$

Determine um polinômio linear $g(t) = a + bt$ tal que $\langle 1, g \rangle = 0$.

¹Um espaço euclidiano é um espaço vetorial dotado de um produto interno