Lista de exercícios
Aula 01 – Espaços vetoriais
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

1. Partindo dos axiomas de corpo (vide notas de aula e Apostol Vol. 1), demonstre os seguintes teoremas, com a, b e c elementos do corpo:
   (a) Lei do cancelamento para adição: Se $a + b = a + c$, então $b = c$. (Dica: adicione o oposto de a aos dois lados da igualdade).
   (b) $-(-a) = a$
   (c) Se $a \neq 0$, então $(a^{-1})^{-1} = a$

2. Mostre, demonstrando a validade dos 11 axiomas de corpo, que o conjunto de pares ordenados de números reais $\{(x, y)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ é um corpo, se considerarmos as seguintes operações:

   Adição $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

   Multiplicação $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

3. Mostre que o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, com a adição e multiplicação usual entre números complexos, é um corpo.

4. Mostre que o conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, das matrizes reais $m \times n$, é um espaço vetorial sobre o corpo dos $\mathbb{R}$.

5. Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^n$, nas n-uplas de números reais, com as definições usuais de adição e multiplicação por reais, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

6. Mostre que o conjunto P_n, dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a n, é um espaço vetorial real, com as operações usuais de adição de polinômios e multiplicação por constante.

7. Mostre que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ com a adição usual e a multiplicação $\alpha\mathbf{u}$ usual entre um número real α e um número complexo $\mathbf{u} = (a + bi)$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais. Nesta notação a e b são números reais e $i^2 = -1$.