

Lista de exercícios

Aula 20 – Diagonalização

Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho – ECT – UFRN

Questionário e Aula Síncrona: Quinta-feira 27/01/2022

1. Lembrando que uma matriz diagonalizável A é semelhante a uma matriz diagonal D , mostre que o determinante de A é igual ao produto de seus autovalores. (DICA: $\det(AB) = \det(A) \det(B)$)
2. Mostre que o traço de uma matriz diagonalizável é a soma de seus autovalores.
3. Sejam a base canônica de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, a base $C = \{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e o operador linear $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Encontre o polinômio característico de T , os autovalores de T e os autovetores correspondentes.
 - (b) Encontre $[T]_C$ e o polinômio característico. O que você pode dizer a respeito dele?
 - (c) Encontre uma base D de $\mathbb{R}^3$, se possível, tal que $[T]_D$ seja diagonal. Escreva a matriz M tal que $[T]_D = M^{-1} [T]_B M$.
4. Seja $A \in L(\mathbb{R}^3)$ o operador linear cuja matriz relativa à base canônica é

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Obtenha os autovalores e autovetores de A .
 - (b) Mostre que existe uma base B de $\mathbb{R}^3$, ortonormal, formada por autovetores de A .
 - (c) Escreva a matriz mudança de base da base de autovetores de A para a base canônica. Verifique que é uma matriz ortogonal $M^{-1} = M^t$.
 - (d) Mostre que $[A]_B = M^t [A] M$.
5. POTÊNCIAS DE MATRIZES: Seja a matriz A diagonalizável, com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ os respectivos autovetores. Nesse caso, a matriz dos autovalores^[*]

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

será semelhante a A , pois existe uma matriz M de mudança de base tal que $A = M^{-1} \Lambda M$.

- (a) Mostre que $A^2 = M^{-1} \Lambda^2 M$
- (b) Mostre que os autovalores de A^2 são $(\lambda_1)^2, (\lambda_2)^2, \dots, (\lambda_n)^2$ e $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ os respectivos autovetores.
- (c) Mostre que $A^k = M^{-1} \Lambda^k M$
- (d) Mostre que os autovalores de A^k são $(\lambda_1)^k, (\lambda_2)^k, \dots, (\lambda_n)^k$ e $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ os respectivos autovetores.
- (e) Mostre que $A^k \mathbf{u} = \alpha_1 (\lambda_1)^k \mathbf{u}_1 + \alpha_2 (\lambda_2)^k \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n (\lambda_n)^k \mathbf{u}_n$ se $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n$. Ou seja, para calcular k aplicações consecutivas de um operador A sobre um vetor $\mathbf{u}$, basta decompor $\mathbf{u}$ na base dos autovetores de A e multiplicar cada componente pela potência do respectivo autovalor: $(\lambda_i)^k$.

^[*] Λ é a letra grega lambda (λ), maiúscula.