Lista de exercícios
Aula 12 – Transformações lineares
Álgebra Linear

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Questionário e Aula Síncrona: Terça-feira 07/12/2021

1. Seja $F : V \to W$ uma aplicação. Mostre que
   (a) Se F é uma transformação linear, então $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
   (b) Se $F(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, então F não é uma transformação linear.

2. Verifique se as seguintes aplicações são injetoras, sobrejetoras, bijetoras e transformações lineares:
   (a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, onde $F(x, y, z) = (z, x + y)$
   (b) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, onde $F(x) = (x, 2)$
   (c) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $F(x, y) = (x^2 + y^2, x)$
   (d) $F : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, onde $F(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A})$
   (e) $F : \mathbb{R}^2 \to C([0, 1])$[Nota 1], onde $F(x, y) = xe^t + ye^{2t}$
   (f) $F : C([a, b]) \to C([a, b])$, onde $F(f(t)) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t,\ x \in [a, b]$
   (g) $D : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$[Nota 2], onde $D(f) = f''$

3. Seja $\boldsymbol{P}$ uma matriz inversível de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $F : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dada por $F(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}$ é um operador linear desse espaço.

4. Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ e seja $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $F(z) = \overline{z}$. Mostre que F é um operador linear. Se tivéssemos considerado o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, F ainda seria um operador linear?

5. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido desta forma na base canônica:
   $$F(1, 0, 0) = (2, 3, 1)$$
   $$F(0, 1, 0) = (5, 2, 7)$$
   $$F(0, 0, 1) = (-2, 0, 7).$$
   Determine $F(x, y, z)$ para um $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qualquer.

6. Encontre a transformação T, do plano, que é uma reflexão em torno da reta $x = y$. (Sugestão: Aplique essa transformação a uma base do $\mathbb{R}^2$)

[Nota 1] $C([0, 1])$: Espaço das funções contínuas no intervalo $[0, 1]$
[Nota 2] $C^2(\mathbb{R})$: Espaço das funções com segundas derivadas contínuas nos $\mathbb{R}$