Notas de aula ECT2202 T02 2022-01-11 Aulas 15-16 — Matriz de transformação

Aplicando a um vetor

$$F(\mathbf{v}) = F\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j F(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \mathbf{w}_i\right)$$

$$F(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_j\right) \mathbf{w}_i$$

Multiplicação de matrizes:

A expressão $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_j$ é a i-ésima linha da matriz coluna, produto das matrizes:

$$[\alpha_{ij}]\,[\beta_j] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

onde $[\beta_j] = [\mathbf{v}]_B$ é a matriz de coordenadas do vetor $\boldsymbol{v}$ na base B. Ou seja:

$$[F(\mathbf{v})]_C = [\alpha_{ij}]\,[\mathbf{v}]_B$$

Definição

A matriz

$$[F]_C^B = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

é a matriz da transformação F em relação às bases B e C.

As colunas de $[F]_C^B$ são as coordenadas de $F(\mathbf{v}_j)$:

$$[F]_C^B = [[F(\mathbf{v}_1)]_C \quad [F(\mathbf{v}_2)]_C \quad \cdots \quad [F(\mathbf{v}_n)]_C]$$

$F: V \to W$ transf. linear $\quad L(V, W)$

Sejam $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$C = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W

$\dim(V) = n \quad \dim(W) = m$

Existe matriz $m \times n$ $[F]_C^B$ tal que

$$[F(v)]_C = [F]_C^B\,[v]_B$$

$$[F]_C^B = \Big[\,[F(v_1)]_C \quad [F(v_2)]_C \quad \cdots \quad [F(v_n)]_C\,\Big]$$

Note: matriz mudança de base:

$$[I]_C^B = \Big[\,[v_1]_C \quad \cdots \quad [v_n]_C\,\Big]$$

matriz do operador identidade $\quad I(v) = v$

2. Considere a transformação linear $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$, que leva um vetor do $\mathbb{R}^3$ a um polinômio de grau $\leqslant 2$. A transformação é dada pela expressão

$$\boxed{F(x, y, z) = x + yt + zt^2}$$

Sejam $\boxed{B = \{1, t, t^2\}}$ a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ e $\boxed{C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcule $F(1, 0, 0)$, $F(0, 1, 0)$ e $F(0, 0, 1)$, ou seja, F aplicada à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Obtenha as coordenadas de $F(1, 0, 0)$, $F(0, 1, 0)$ e $F(0, 0, 1)$ em relação à base B.

(c) Escreva a matriz $[F]^C_B$ em relação às bases canônicas dos espaços.

$F : \mathbb{R}^3 \to P_2$

c) $[F]^C_B = \begin{bmatrix} [F(1,0,0)]_B & [F(0,1,0)]_B & [F(0,0,1)]_B \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} [1]_B & [t]_B & [t^2]_B \end{bmatrix}$ (a)

(b) (b)

$[F]^C_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c)

(d) Escreva $[v]_C$, a matriz de coordenadas de $v = (2, -1, 3)$ em relação à base C.

(e) Calcule $[F(v)]_B = [F]^C_B\,[v]_C$.

(f) Escreva explicitamente o polinômio $F(v)$.

(g) Calcule $F\left(x_0, v_0, \frac{g}{2}\right)$.

d) $[v]_c = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

e) $[F(v)]_B = [F]^c_B\,[v]_c$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_c$

$[F(v)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_B$ //

$$v = (2,-1,3) \rightarrow F(v) = F(2,-1,3) = 2 - t + 3t^2$$

$$F(x, y, z) = x + yt + zt^2$$

$$[F(v)]_B = [F(2,-1,3)]_B = [2 - t + 3t^2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_B \leftarrow$$

(f) Escreva explicitamente o polinômio $F(v)$.

(g) Calcule $F\left(x_0, v_0, \frac{g}{2}\right)$.

$$[F(v)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_B \Rightarrow F(v) = 2 \cdot 1 + (-1)t + 3t^2$$
$$= 2 - t + 3t^2$$

g) $F(2,-1,3)$

$$F(x, y, z) = x + yt + zt^2$$

$F(x, y, z)$

$$F(x_0, y_0, g/2) = x_0 + y_0 t + \frac{g}{2} t^2$$

$$[F(x_0, y_0, g/2)]_B = [(x_0, y_0, g/2)]_C$$
$$= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ g/2 \end{bmatrix}_B$$

(f)

$B = \{1, t, t^2\}$

$$F(x_0, y_0, g/2) = x_0(1) + y_0(t) + \frac{g}{2}(t^2)$$
$$= x_0 + y_0 t + \frac{g}{2} t^2$$

Exemplo:

$$F \in L(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2)$$

$$F(x, y, z) = (x + y,\ y - z)$$

a) obtenha a matriz [F] em relação às baeses canônicas
b) calcule [F(2, -3, 5)]

a) $$[F] = \begin{bmatrix} [F(1,0,0)] & [F(0,1,0)] & [F(0,0,1)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [(1,0)] & [(1,1)] & [(0,-1)] \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $$[F(2,-3,5)] = [F][(2,-3,5)]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 - 3 + 0 \\ 0 - 3 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$[F(2,-3,5)] = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$F(2,-3,5) = (-1, -8).$$

Alternativamente

$F(x,y,z) = (x+y, y-z)$

$$[F(2,-3,5)] = [(2-3, -3-5)] = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Seja $G: P_1 \to P_1$

tal que $[G] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ na base canônica

Calcule G(5-8t)

$$[G(5-8t)] = [G][5-8t]$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5-(-8) \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$G(5-8t) = 13(1) + 5t$$
$$= 13 + 5t.$$

Obtenha $G(a+bt)$:

$$[G(a+bt)] = [G][a+bt]$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a-b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ a \end{bmatrix}$$

$$G(a+bt) = (a-b) + at \leftarrow$$

$$G(5-8t) = (5-(-8)) + 5t = 13 + 5t$$

Matriz da adição, da multiplicação e da composição de transformações

Seja $S: V \to W$ $\quad S, T \in L(V,W)$

$T: V \to W$

$$\begin{cases} \text{existe } S+T: V \to W \text{ t.q. } (S+T)(v) = S(v) + T(v) \\ \text{existe } \lambda S: V \to W \text{ t.q. } (\lambda S)(v) = \lambda(S(v)) \end{cases}$$

adição de vetores de L(V,W)

adição de vetores de W

Dadas bases B, de V; e C, de W.

existem $[S]^B_C$ e $[T]^B_C$ matrizes $m \times n$

$n \to \dim(V)$

$m \to \dim(W)$

$$\begin{cases} [S+T] = [S] + [T] & \to \text{Aditiva} \\ [\lambda S] = \lambda [S] & \to \text{Homogênea} \end{cases}$$

A operação de levar uma trans.f linear de L(V,W) a uma matriz m×n é uma transformação linear.
É bijetora, logo $\dim(L(V,W)) = \dim(M_{m \times n}) = m \times n = \dim(V) \times \dim(W)$
L(V,W) é ISOMORFO a $M_{m \times n}$

Exemplo

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} S(x,y) = (2x+3y, -2y) \\ T(x,y) = (-x-y, 2x-y) \end{array}\right\} (S+T)(x,y) = (x+2y, 2x-3y)$$

a) obtenha [S], [T], [S+T] em relação à base canônica

$$[S] = \big[\, [S(1,0)] \quad [S(0,1)] \,\big] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} //$$

$$[T] = \big[\, [T(1,0)] \quad [T(0,1)] \,\big] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} //$$

$$[S+T] = [S]+[T] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

b) calcule [S(2,3)]; [T(2,3)]; [(S+T)(5,-8)]

$$[S(2,3)] = [S]\,[(2,3)] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+9 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$[T(2,3)]$ (exercício)

$$[(S+T)(5,-8)] = [S+T]\,[(5,-8)] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-16 \\ 10+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 34 \end{bmatrix} //$$

Composição

Exemplo

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$S(x,y) = (2x+3y, -2y)$$
$$T(x,y) = (-x-y, 2x-y)$$

c) obtenha [SoT]

$$(S \circ T)(v) = S(T(v)) \neq (T \circ S)(v) = T(S(v))$$

$$[(S \circ T)(v)] = [S(T(v))]$$
$$= [S][T(v)]$$
$$= [S]([T][v])$$
$$[S \circ T][v] = ([S][T])[v]$$

coluna

$$[S \circ T] = [S][T]$$

calculando:

$$[S \circ T] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2+6 & -2-3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$
$$[S \circ T] = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

d) calcule [(S ∘ T)(-6,2)]

$$[(S\circ T)(-6,2)] = [S\circ T][(-6,2)] = [S][T][(-6,2)]$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -24 & -10 \\ 24+4 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$[(S\circ T)(-6,2)] = [S(T(-6,2))] = [S][T][(-6,2)]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-42 \\ -2(-14) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34 \\ 28 \end{bmatrix} //$$

Note:

$$[T\circ S] = [T][S] \neq [S][T].$$

Lembrete: $$([S][T])^{-1} = [T]^{-1}[S]^{-1}$$

$$[R_y]\left([R_z][v]\right)$$