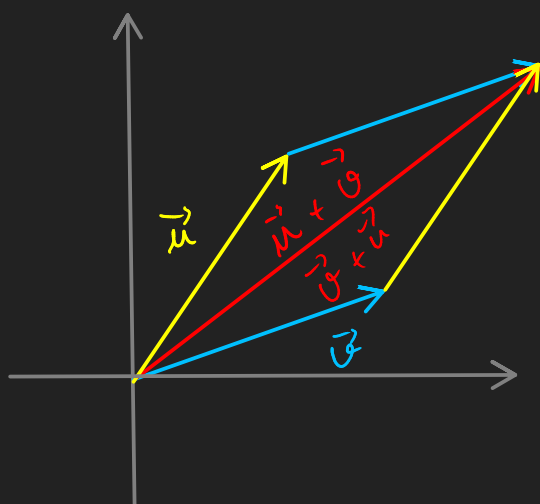


Vetores e geometria



$$2 + 2 = 4$$

$$5 + 6 = 11$$

$$42, 23 + 35, 48 = 22$$

$$\vec{u} + \vec{v}$$

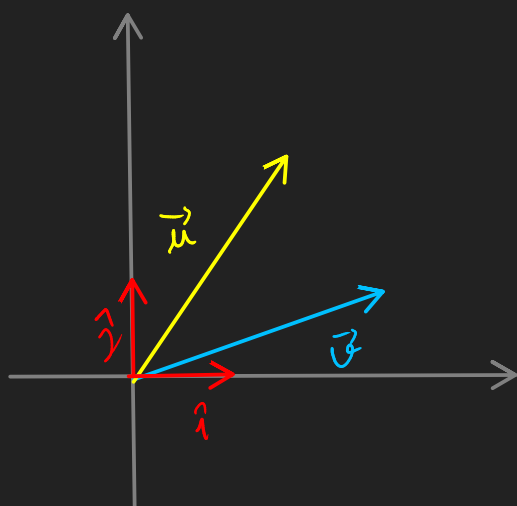
DEFINE adição

$$\vec{v} + \vec{u}$$

seja α um número real

$$\alpha \vec{u}$$

multiplicação do vetor pelo escalar
DEFINIDA



$$\vec{u} = (x, y), \quad v = (a, b)$$

$$\vec{u} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

Regra que associa setas
a pares ordenados

$$\vec{u} + \vec{v} = (x, y) + (a, b)$$

$$= (x+a, y+b)$$

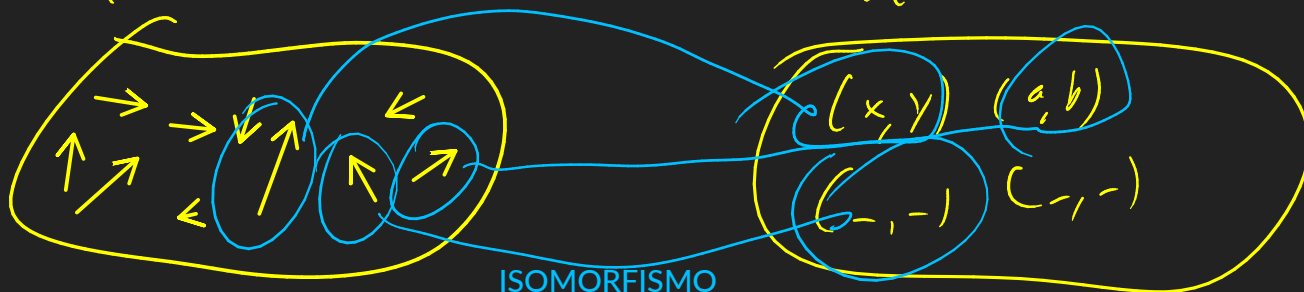
DEFINIÇÃO DE
ADIÇÃO NO $\mathbb{R}^2$

$$\alpha \vec{u} = (\alpha x, \alpha y), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

P

TRANSFORMAÇÃO BIJETORA

$\mathbb{R}^2$



ISOMORFISMO

$M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$

MATRIZES COLUNA COM 2 LINHAS E ELEMENTOS REAIS

definição

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \dots$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$$

$P_1(\mathbb{R})$ POLINÔMIOS DE GRAU ≤ 1 A COEFICIENTES REAIS

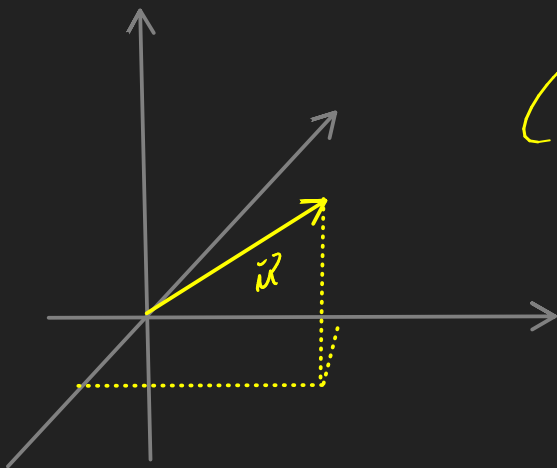
$$P(t) = \underline{a} + \underline{b}t \quad \text{é um vetor de } P_1(\mathbb{R})$$

$$(x, y) \rightarrow x + yt$$

$$0 \in P_1 \quad 0 = 0 + 0t \quad \text{vetor nulo}$$

$$(a + bt) + (0 + 0t) = (a + 0) + (b + 0)t = a + bt$$

GEOMETRIA ESPACIAL

 $\mathbb{R}^3$ 

$$u = (x, y, z)$$

 $\mathbb{R}^4$

$$u = (x, y, z, w)$$

 $\mathbb{R}^n$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

 n componentes

$$\mathbb{C}^n = \{ (z_1, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C} \}$$

DEFINIÇÃO: ESPAÇO VETORIAL

- CONJUNTO (elementos: vetores)
 - OPERAÇÃO DE ADIÇÃO ENTRE VETORES
 - OPERAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO DE VETOR POR ESCALAR (neste curso $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
(associado a um OUTRO conjunto: um corpo de escalares)

OPERAÇÕES OBEDECEM ÀS 10 PROPRIEDADES (AXIOMAS)

1. **Fechamento por adição:** A adição entre dois elementos u e v quaisquer de V resulta em um *único* elemento de V , denotado por $u + v$ e chamado de *soma* de u e v .
2. **Fechamento por multiplicação por escalar:** A multiplicação entre um elemento $\alpha \in \mathbb{K}$, denominado *escalar*, e um elemento $u \in V$ resulta em um *único* elemento de V , denotado por $\alpha \cdot u$ (ou αu), chamado *produto* de α e u .
3. **Comutatividade da adição:** $u + v = v + u$
4. **Associatividade da adição:** $u + (v + w) = (u + v) + w$
5. **Existência da identidade da adição:** Existe um elemento em V , denotado por 0 e chamado de *vetor nulo* tal que $u + 0 = u$ para todo $u \in V$.
6. **Existência do oposto:** Para cada elemento $u \in V$ existe um elemento, chamado *oposto* de u e denotado por $(-u)$, tal que $u + (-u) = 0$.
7. **Associatividade da multiplicação por escalares:** $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
8. **Distributividade da soma de escalares:** $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
9. **Distributividade da soma de vetores:** $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
10. **Unidade:** $1 \cdot u = u$, onde 1 é a unidade do corpo $\mathbb{K}$.

EXEMPLOS DE ESPAÇOS VETORIAIS

$$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n \quad (\mathbb{R}^\infty) \quad \mathbb{C}, \mathbb{C}_{\text{sobre } \mathbb{R}}, \mathbb{C}^n$$
$$P_n(\mathbb{R}) \quad a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

A PRÓPRIA FUNÇÃO POLINOMIAL É O VETOR.

$$M_{m \times n}$$
$$M_{2 \times 2}, M_{4 \times 1}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$C[a, b]$$

ESPAÇO VETORIAL DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS
NO INTERVALO FECHADO $[a, b]$

$$\sin(t) \in C[-\pi, \pi]$$

transformadas de Fourier

$$u = x\hat{i} + y\hat{j} \quad \longrightarrow \quad f(t) = A_0 + A_1 \cos(t) + A_2 \cos(2t) \dots \\ + B_1 \sin(t) + B_2 \sin(2t) \dots$$

$$f \stackrel{?}{=} g \quad f(t) = g(t) \text{ para todo } t$$

PROPRIEDADES DE ESPAÇOS VETORIAIS

Seja V espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$

$$\alpha u \in V, \quad \alpha \in \mathbb{K}, \quad u \in V$$

$\mathbf{0}$ é o vetor nulo de V $\mathbf{0}$

Valer:

$$\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{para todo } \alpha \text{ em } \mathbb{K}$$

Prova:

$$\alpha \mathbf{0} = \alpha (\mathbf{0} + \mathbf{0}) \quad (\text{Axioma 5})$$

$$\underbrace{\alpha \mathbf{0}}_v = \underbrace{\alpha \mathbf{0}}_v + \underbrace{\alpha \mathbf{0}}_v \quad (\text{Axioma 4})$$

só pode ser o vetor nulo
(pelo axioma 5)

$$\text{então } \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Professor, quando você fez o exemplo utilizando V ou F e atribuindo valores 1 e 0 trabalhando com congruência módulo 2, seria possível chegar nas mesmas conclusões utilizando outros números/outro mod?

 $\{V, F\}$

+	V	F
V	F	V
F	V	F

x	V	F
V	V	F
F	F	F


 $\{0, 1\}$

$$a \oplus b = (a + b) \bmod 2$$

$$\begin{aligned} 1 \oplus 1 &= (1 + 1) \bmod 2 \\ &= 2 \bmod 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Existen p^k

 $\{0, 1, \dots, k-1\}$
 p^k

if.

é corpo se e somente se k for primo

$$a \oplus b = (a + b) \bmod k$$

$$a \otimes b = (ab) \bmod k$$