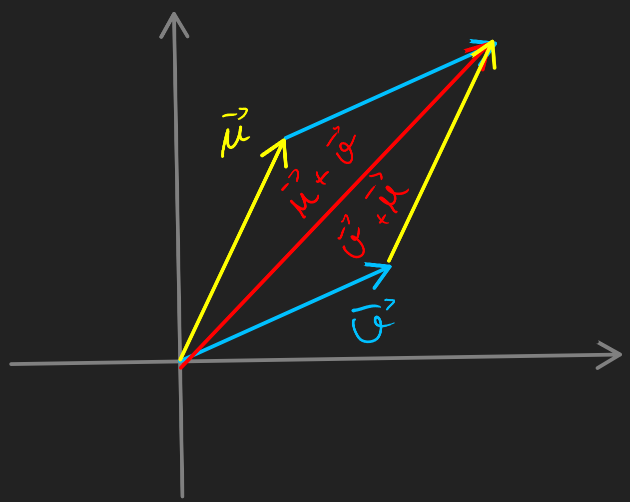
# Notas de aula ECT2202 T03 2021-10-21 Aula 01 — Espaços vetoriais

VGA:



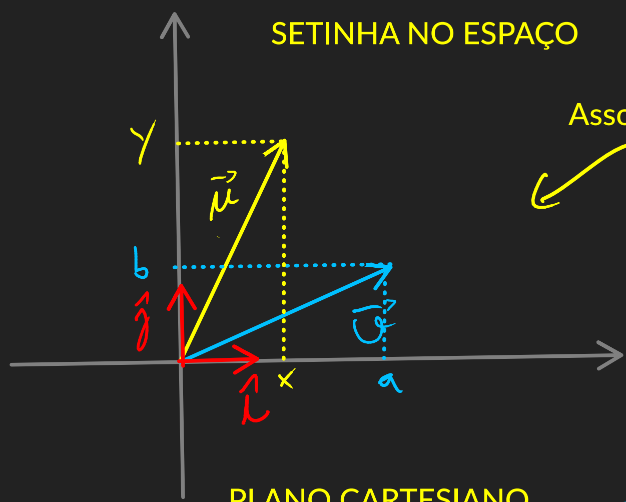

$1+1=2$

$5+8=13$

$47{,}53+32{,}85=\,???$

Adição de vetores da geometria
(segmentos de reta orientados)
DEFINIDO
CONSEQUÊNCIA:
adição é comutativa

Multiplicação de vetores da geometria
por números reais: DEFINIDA




SETINHA NO ESPAÇO $\quad T: \vec{u} \mapsto (x,y)$

Associação

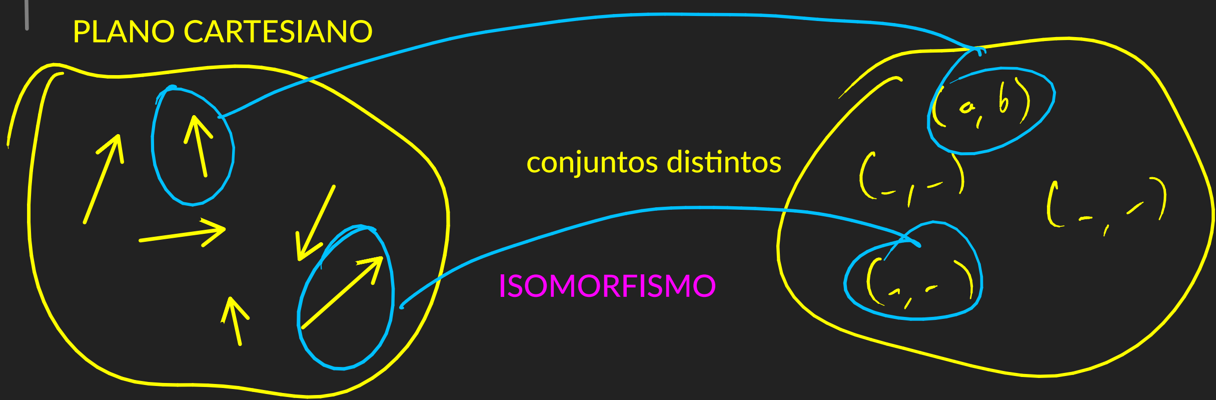
PAR ORDENADO DE NÚMEROS REAIS.

$$\vec{u} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} \mapsto (x,y)$$

$$\vec{v} = a\,\hat{i} + b\,\hat{j} \mapsto (a,b)$$

$$\mathbb{R}^2$$

PLANO CARTESIANO




$$\mathcal{P}\ \begin{cases} +\\ \cdot\ \alpha\vec{v}\end{cases}$$

$$(a,b) + (x,y) = (a+x,\ b+y)$$

adiç de pares $\mathbb{R}^2$ $\qquad$ adiç de reais

$$M_{2\times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

CONJ. DAS MATRIZES-COLUNA
COM 2 LINHAS

$M_{2\times1}(\mathbb{R})$

$$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \right\}$$

Ex uga

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

AL:

ESPAÇO VETORIAL:

- CONJUNTO (ELEMENTOS: VETORES)
- ADIÇÃO ENTRE DOIS ELEMENTOS
- MULTIPLICAÇÃO DE VETOR POR ESCALAR

OPERAÇÕES TEM PROPRIEADES ESPECÍFICAS (AXIOMAS)

1. **Fechamento por adição**: A adição entre dois elementos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ quaisquer de $V$ resulta em um *único* elemento de $V$, denotado por $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ e chamado de *soma* de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.
2. **Fechamento por multiplicação por escalar**: A multiplicação entre um elemento $\alpha \in \mathbb{K}$, denominado *escalar*, e um elemento $\boldsymbol{u} \in V$ resulta em um *único* elemento de $V$, denotado por $\alpha \cdot \boldsymbol{u}$ (ou $\alpha\boldsymbol{u}$), chamado *produto* de $\alpha$ e $\boldsymbol{u}$.
3. **Comutatividade da adição**: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
4. **Associatividade da adição**: $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$
5. **Existência da identidade da adição**: Existe um elemento em $V$, denotado por $\mathbf{0}$ e chamado de *vetor nulo* tal que $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$ para todo $\boldsymbol{u} \in V$.
6. **Existência do oposto**: Para cada elemento $\boldsymbol{u} \in V$ existe um elemento, chamado *oposto* de $\boldsymbol{u}$ e denotado por $(-\boldsymbol{u})$, tal que $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = 0$.
7. **Associatividade da multiplicação por escalares**: $\alpha(\beta\boldsymbol{u}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{u}$
8. **Distributividade da soma de escalares**: $(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}$
9. **Distributividade da soma de vetores**: $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$
10. **Unidade**: $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$, onde 1 é a unidade do corpo $\mathbb{K}$.

$P_2(\mathbb{R})$

POLINÔMIOS DE GRAU ≤ 2

ADIÇÃO: ADIÇÃO DE POLINÔMIOS
MULT. ESCALAR: AMULT DO POLINÔMIO POR CONSTANTE

É ESPAÇO VETORIAL

$$\underline{a}x^2 + \underline{b}x + \underline{c} \in P_2(\mathbb{R})$$

$$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R}^n : \{ (\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}_{n \text{ componentes}}) \mid a_i \in \mathbb{R} \}$$

$$M_{m \times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M_{m \times n}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

$C[a,b]$ FUNÇÕES REAIS CONTÍNUAS NO INTERVALO FECHADO [a,b] $\subset$

$\mathbb{R}$ SÃO ESPAÇO VETORIAL SOBRE O CORPO DOS REAIS.

$u, v \in \mathbb{R}$ $\quad u + v$ Adiç

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha u$ mult. por escalar

$\mathbb{C}$ ESPAÇO VETORIAL SOBRE OS COPMPLEXOS

$u, v \in \mathbb{C}$ $\quad u + v \in \mathbb{C}$

$\alpha \in \mathbb{C}$ $\quad \alpha v \in \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ ESPAÇO VETORIAL SOBRE OS REAIS

$u, v \in \mathbb{C}$ $\quad u + v \in \mathbb{C}$

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha u = \alpha(a + bi) = (\alpha a) + (\alpha b)i$

Axiomas de Corpo:

Mostre que o conjunto {V, F} com as operações de adição e multiplicação a seguir formam um corpo.

$\mathbb{L} = \{V, F\}$

→ Adição (ou exclusivo (XOR))

$V + V = F$
$V + F = V$
$F + V = V$
$F + F = F$

Tabela verdade

| + | V | F |
|---|---|---|
| V | F | V |
| F | V | F |

Multiplicação (e (AND))

$V \times V = V$
$V \times F = F$
$F \times V = F$
$F \times F = F$

| × | V | F |
|---|---|---|
| V | V | F |
| F | F | F |

6. **Associatividade da multiplicação**: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

$\{V, F\}$ $+, \times$ $\hookrightarrow$ $\{0, 1\} \subset \mathbb{Z}$

$\alpha \oplus \beta = [\alpha + \beta] \bmod 2$ resto da div. por 2
$\alpha \otimes \beta = [\alpha\beta] \bmod 2$

$\alpha(\beta\gamma)$ 2 casos:

$\alpha = \beta = \gamma = 1$
$\alpha(\beta\gamma) = 1(1 \cdot 1) = 1$
$(\alpha\beta)\gamma = (1 \cdot 1)1 = 1$

Se $\alpha$ $\beta$ ou $\gamma = 0$
$\alpha(\beta\gamma) = 0(\beta\gamma)$ ou $\alpha(0) = 0$
$(\alpha\beta)\gamma = (0)\gamma$ ou $(\alpha\beta)0 = 0$

*Exemplo* 1.1.4: O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ da forma $(a + bi)$, com $a$ e $b$ números reais e $i^2 = -1$, a adição definida como

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

e multiplicação definida como

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

forma um corpo.

6. **Associatividade da multiplicação**: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

1 2

$$\begin{cases} \alpha = (a+bi) \\ \beta = (c+di) \\ \gamma = (x+yi) \end{cases}$$

1 $\alpha(\beta\gamma) =$

$(a+bi)\left[\underbrace{(c+di) + (x+yi)}\right] =$

$(a+bi)\left[(cx-dy) + (cy+dx)i\right]$

$$\begin{cases} \left[a(cx-dy) - b(cy+dx)\right] + \left[a(cy+dx) + b(cx-dy)\right]i \\ = \alpha(\beta\gamma) \end{cases}$$

2 $(\alpha\beta)\gamma = \left[\underbrace{(a+bi)(c+di)}\right](x+yi)$

$\left[(ac-bd) + (ad+bc)i\right](x+yi)$

$$\begin{cases} \left[(ac-bd)x - (ad+bc)y\right] + \left[(ac-bd)y + (ad+bc)x\right]i \\ = (\alpha\beta)\gamma \end{cases}$$

2

$$\left[a(cx - dy) - b(cy + dx)\right] + \left[a(cy + dx) + b(cx - dy)\right] i \quad ①$$

$$\overset{?}{=}$$

$$\left[(ac - bd)x - (ad + bc)y\right] + \left[(ac - bd)y + (ad + bc)x\right] i \quad ②$$

① $\left[acx - ady - bcy - bdx\right] \left[\cancel{acy} + \cancel{adx} + \cancel{bcx} - \cancel{bdy}\right] i$

$=$

② $\left[\cancel{acx} - \cancel{bdx} - \cancel{ady} - \cancel{bcy}\right] \left[\cancel{acy} - \cancel{bdy} + \cancel{adx} + \cancel{bcx}\right] i$