Notas de aula ECT2202 T02 2022-02-01 Aula 21 — Aplicações de Diagonalização

Autovalores e autovetores em espaços de dimensão infinita

Equações diferenciais e problemas de valor inicial.

$$A \frac{d^2 f}{dt^2} + B \frac{df}{dt} + C f = 0$$

diferencial

Equação

Equação diferencial
ordinária de segunda ordem
linear
a coeficientes constantes

A, B, C ctes

$f(t)$ é solução da eq. dif.

Ex.: 2ª lei de Newton

$$F = ma \qquad a(t) = \frac{d^2 x}{dt}$$

$$\boxed{F(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2}}$$

$$F = \frac{dp}{dt}$$

$$p = mv$$

$$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

$$\boxed{F = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}}$$

Caso $F(t) = mg$ constante:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = g$$

$$\int \frac{d^2x}{dt^2}\, dt = \int g\, dt$$

$$\frac{dx}{dt} + c_1 = gt + c_2 \qquad (v_0 = c_2 - c_1)$$

$$\frac{dx}{dt} = gt + v_0$$

$$\int \frac{dx}{dt}\, dt = \int v_0 + gt \; dt$$

$$x(t) + c_3 = v_0 t + \frac{gt^2}{2} + c_4 \qquad (x_0 = c_4 - c_3)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2} \rightarrow \text{Família de soluções}$$

2ª lei Newton $\left\{ \frac{d^2x}{dt^2} = g \right.$

Condições iniciais $(t=0)$

$\frac{dx}{dt} = v(0) = 0$ $\quad x(0) = 0$

$\begin{cases} x(t=0) \\ v(t=0) \end{cases}$

Um bloco de massa m é solto do repouso de uma altura h = 2,0m sob a força peso mg. Obtenha a posição do bloco em função do tempo.

altura $h = 2{,}0\ m$

$$x(t=0) = 2 = x_0 + 0 v_0 + 0^2 \frac{g}{2}$$

$$x_0 = 2$$

repouso:

$$0 = v(t=0) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0 + 0g$$

$$v_0 = 0$$

$$x(t) = 2 + \frac{gt^2}{2} \quad // \quad \rightarrow \text{única solução}$$

PROBLEMA DE VALOR INICIAL

- Equação diferencial
- Condição(ões) inical(is)

$$\frac{df}{dt} = \lambda f$$

A derivada de f é proporcional a f.

$f(t) = Ae^{\lambda t}$ "Ansatz" (chute)

$$\frac{df}{dt} = \lambda A e^{\lambda t} = \lambda f(t) //$$

$f(t) = A e^{\lambda t}$ → família de soluções. Linearmente dependente.

$$\frac{df}{dt} = \lambda f$$

$D = \frac{d}{dt}$ operador linear $C^\infty \to C^\infty$

$D(f) = \lambda f$ → equação de autovalores

f é autovetor de D, com autovalor λ

portanto todo vetor no espaço gerado por f será solução da eq. diferencial.

$f(t) = A e^{\lambda t}$ ⇒ $Ae^{\lambda t}$ é autovetor de D com autovalor λ

↳ Família de soluções
Subespaço de $\mathrm{Im}\left(\frac{d}{dt}\right)$

$\frac{df}{dt} = \lambda_1 f$ ⇒ $B e^{\lambda_1 t}$

$\{e^{\lambda t}, e^{\lambda_1 t}\}$ é L.I. para $\lambda_1 \neq \lambda$

→ de fato $f(t) = A e^{\lambda t}$ é solução de $\frac{df}{dt} = \lambda f$

↳ existem outras (L.I.)

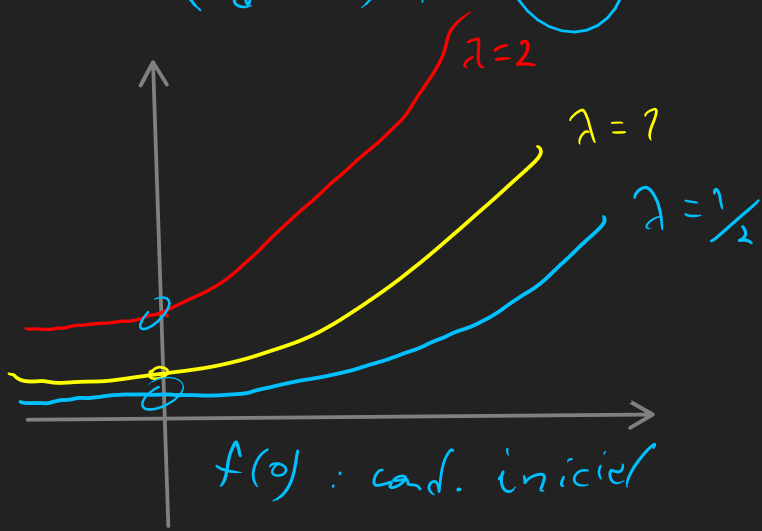
Nº 30. (Teorema de PICARD e teorema de exitência e unicidade)

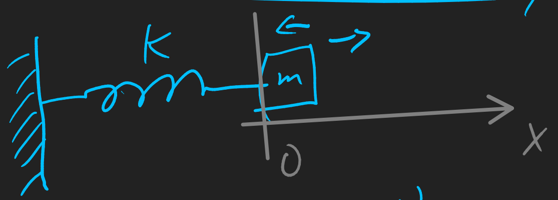
$$\frac{df}{dt} = \lambda f$$

1ª ordem.

$$\dim\left(\ker\left(\frac{d}{dt} - \lambda I\right)\right) = 1$$

$$f(t) = A e^{\lambda t} \quad //$$





$$F = -kx$$

$$F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$ → Eq. dif. ord. 2ª ordem
2 soluções L.I.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\frac{k}{m} > 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Quais funções têm a segunda derivada proprcional a ela mesma, com sinal trocado?

$\operatorname{sen}(pt)$
$\cos(pt)$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\operatorname{sen}(pt)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(\operatorname{sen}(pt))\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(p\cos(pt)\right)$$

$$= p \frac{d}{dt}(\cos(pt))$$

$$= p(-p \operatorname{sen}(pt))$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -p^2 \operatorname{sen}(pt) = -p^2 x(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \Rightarrow p = \omega$$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= \operatorname{sen}(\omega t) \\ x_2(t) &= \cos(\omega t) \end{aligned}\right\} \text{L.I.} \quad (1^{\underline{a}} \text{ unidade})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \begin{cases} x(t) : \text{auto vetor} \\ -\omega^2 : \text{auto valor.} \end{cases}$$

$$V(\lambda) = \operatorname{span}\{\operatorname{sen}(\omega t), \cos(\omega t)\} \quad : \text{dimensão } 2.$$

$\rightarrow x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t) + B \cos(\omega t)$ é auto valor de $\frac{d^2}{dt^2}$ com autovalor $-\omega^2$

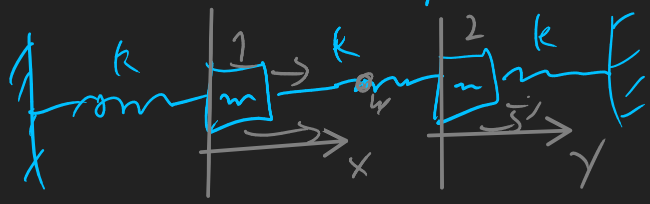
Condições inicais determinam A e B.

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \omega^2 f \; : \; x(t) = A e^{\sqrt{\omega} t} + B e^{-\sqrt{\omega} t}$$

equilíbrio INSTÁVEL

$$\operatorname{sen}(i\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

Osciladores acoplados (Aula 21)



$$F_1 = -kx + k(y-x)$$

↳ distância

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx + k(y-x) \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -ky + k(x-y) \end{cases}$$

⋮

$$\begin{cases} \dfrac{d^2p}{dt^2} = -\omega_1^2 p \rightarrow p(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_1 t) + B\cos(\omega_1 t) \\ \dfrac{d^2q}{dt^2} = -\omega_2^2 q \rightarrow q(t) = C\,\mathrm{sen}(\omega_2 t) + D\cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

modos normais de vibração.

Energia potencial elástica:

$$U = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx} \qquad F = -\vec{\nabla} U$$

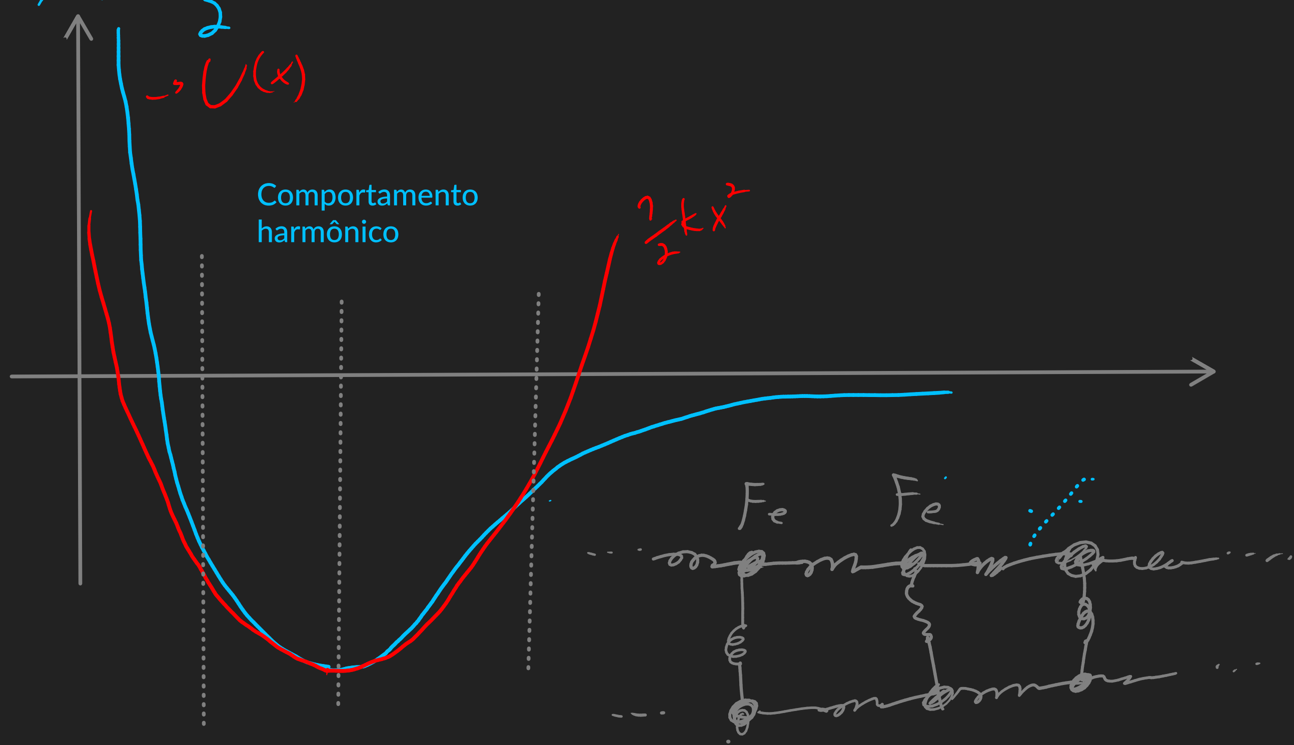
QUALQUER função de energia potencial, próximo ao mínimo local.

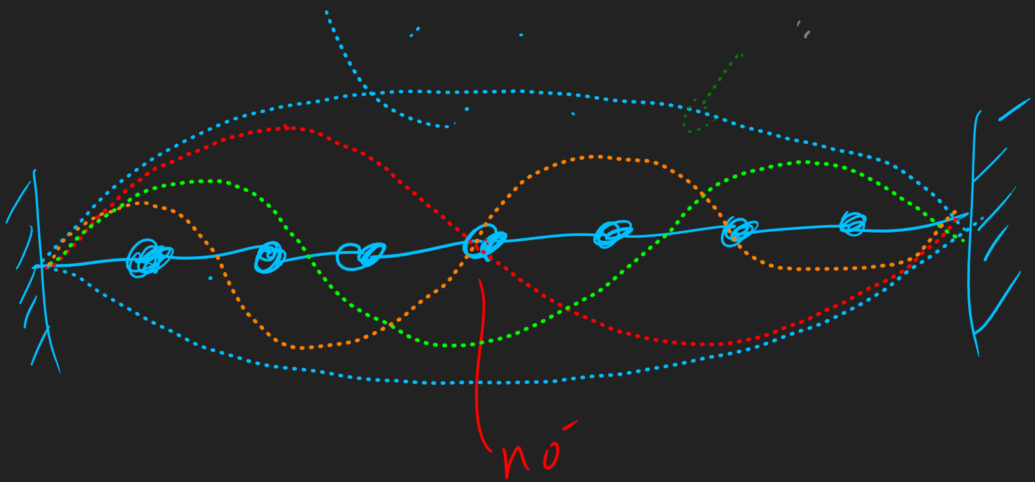
Série de taylor $U(x) \simeq U(0) + \left.\dfrac{dU}{dx}\right|_0 x + \dfrac{1}{2}\left.\dfrac{d^2U}{dx^2}\right|_0 x^2$

mínimo local: $\dfrac{dU}{dx} = 0$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = k > 0$$

$U(x) \approx \frac{1}{2} k x^2$





1. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + y, x - y)$.
   (a) Escreva a matriz $[T]$ desse operador em relação à base canônica.
   (b) Escreva $p_T(\lambda) = \det([T] - \lambda \mathbb{1})$, o polinômio característico de T. Qual o grau desse polinômio, na variável λ?
   (c) Obtenha as raízes de $p_T(\lambda)$, os autovalores de T. Qual a multiplicidade algébrica de cada raiz?
   (d) Para cada autovalor λ obtido no item anterior, encontre um conjunto L.I. de autovetores $\boldsymbol{v}$ associados a λ pela equação $T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$.
   (e) Quantos autovetores L.I. estão associados a cada autovalor? Essa é a *multiplicidade geométrica* do autovalor. Compare com a multiplicidade algébrica.
   (f) O conjunto B de autovetores que você encontrou forma uma base de $\mathbb{R}^2$? Se sim, escreva a matriz mudança de base de B para a base canônica: $[\mathbb{I}]^B_C$.
   (g) Se B for base, escreva $[T]_B$, a matriz de T na base B.

$[T]_B = [I]^C_B \, [T]_C \, [I]^B_C$

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (x, y, z) \\ (x, 0, x) \\ x(1, 0, 1) \end{matrix}$$

$z = x$ E) L.D

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (z, 0, z) = z(1, 0, 1)$$

z - var livre

5. Verifique que λ é autovalor e $\boldsymbol{v}_\lambda$ é o respectivo autovetor do operador $T : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ nos casos:

(a) $T(f(x)) = f'(x)$; $\lambda = \lambda$; $\boldsymbol{v}_\lambda = e^{\lambda x}$

(b) $T(f(t)) = f''(t)$; $\lambda = -\omega^2$; $\boldsymbol{v}_\lambda = \text{sen}(\omega t)$

(c) $T(f(t)) = f''(t)$; $\lambda = -\omega^2$; $\boldsymbol{v}_\lambda = \cos(\omega t)$

$$T(f(x)) = f'(x)$$

$$T(f(x)) = \lambda f(x)$$

$$f'(x) = \lambda f(x)$$

$$f(x) = e^{\lambda x}$$

$$f'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda f(x) \checkmark$$

9. Considere $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os autovalores e autovetores correspondentes de A e A^2.

(b) O que você pode dizer ao comparar os autovetores de A e A^2?

(c) E quanto aos autovalores?

(d) O que você espera dos autovalores e autovetores de A^3? Verifique.

(e) Use a equação de autovetores $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ para demonstrar esse resultado para A^n.

d) Autovalores de A^3: λ_1^3 e λ_2^3

e mesmos autovetores de A.

Seja v autovetor de A com autovalor λ.

$$Av = \lambda v$$

$$A^2 v = A(Av)$$
$$= A(\lambda v)$$
$$= \lambda(Av)$$
$$= \lambda(\lambda v)$$
$$= \lambda^2 v$$

$$\begin{cases} A^n v = A^{n-1}(Av) \\ \quad = A^{n-1}(\lambda v) \\ \quad = \lambda(A^{n-1} v) \end{cases} \rightarrow$$

para $\underbrace{n=2}$:

$$A^2 v = A^1(Av)$$
$$= A(\lambda v)$$
$$= \lambda(Av)$$
$$= \lambda^2 v$$

Se $A^{n-1} v = \lambda^{n-1} v$

então $A^n v = \lambda^n v$.

Indução finita.