Notas de aula ECT2202 T03 2021-10-28 Aulas 02-03 — Subespaços e Comb. Lineares

Aula 03 Combinações Lineares

1. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os vetores
   - $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, -1)$
   - $\boldsymbol{u}_2 = (-1, 1, 0)$
   - $\boldsymbol{u}_3 = (2, 1, -1)$
   - $\boxed{\boldsymbol{u}_4 = (-1, 0, -1).}$

   Obtenha os vetores dados pelas combinações lineares abaixo:

   a. $\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2$.
   b. $-\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$.
   c. $2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_4$.

2. Procure escrever o vetor $\boldsymbol{u}_4$ como combinação linear dos outros três vetores do exercício anterior. Compare com o resultado do item anterior.

Escreva o vetor (-1, 0, -1) como combinação linear dos seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$ u1, u2, 3

$$u_4 = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$$

$$(-1, 0, -1) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(-1, 1, 0) + \gamma(2, 1, -1)$$ equação vetorial

$$= (\alpha, 0, -\alpha) + (-\beta, \beta, 0) + (2\gamma, \gamma, -\gamma)$$

$$(-1, 0, -1) = (\alpha - \beta + 2\gamma, \beta + \gamma, -\alpha - \gamma)$$ equação vetorial

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = -1 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - \gamma = -1 \end{cases}$$

sistema de equações escalares

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = -1 \\ \beta = -\gamma \\ \alpha = 1 - \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 1 - \gamma + \gamma + 2\gamma &= -1 \\ 1 + 2\gamma &= -1 \\ 2\gamma &= -2 \\ \gamma &= -1 \end{aligned}$$

$\gamma = -1 \Rightarrow \beta = 1 \qquad \alpha = 1-(-1) = 2$

$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1$

$(-1,0,-1) = 2(1,0,-1) + 1(-1,1,0) - 1(2,1,-1)$ ←

$\boxed{u_4 = 2u_1 + u_2 - u_3}$ ←

c. $2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_4$.

2. Procure escrever o vetor $\boldsymbol{u}_4$ como combinação linear dos outros três vetores do exercício anterior. Compare com o resultado do item anterior.

$2u_1 + u_2 - u_3 - u_4 =$

$2(1,0,-1) + 1(-1,1,0) - 1(2,1,-1) - (-1,0,-1)$

$= (0,0,0)$

$\boxed{u_4 = 2u_1 + u_2 - u_3}$

$(\underbrace{2u_1 + u_2 - u_3}_{u_4}) - u_4 =$

$u_4 - u_4 = 0$

CICERO FILHO 11:21

professor quando o senhor fala Escalares $\alpha \in \mathbb{R}$

Adição $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$.

Multiplicação por escalar $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$

quer dizer pra

provar esses axiomas ?

Espaço vetorial

a) das funções reais

b) dos polinômios

1. Para que um conjunto, associado a um corpo e as operações de *adição* entre seus elementos e *multiplicação* de seus elementos e um escalar, seja considerado um espaço vetorial, deve satisfazer aos 10 axiomas. Verifique que os conjuntos abaixo, com as operações dadas, são espaços vetoriais, verificando a validade de cada axioma.

(c) $P_n(\mathbb{R})$, o conjunto dos polinômios[Nota 1] de grau $\leqslant n$ a valores reais:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

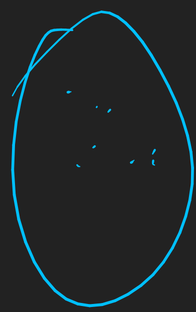
[Nota 1]Dica: todo polinômio é uma função.

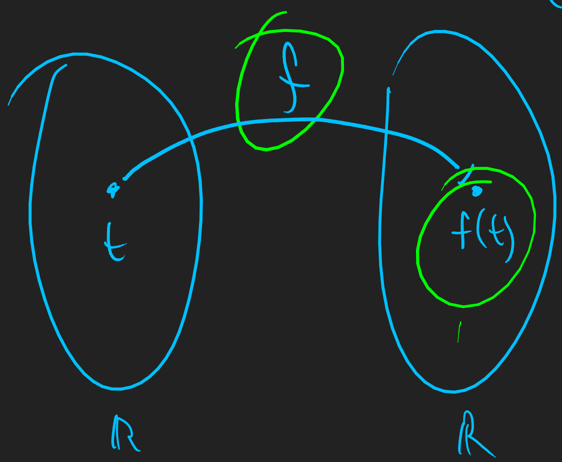
Escalares $\alpha \in \mathbb{R}$

Adição $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$.

Multiplicação por escalar $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$

$\mathbb{R}$



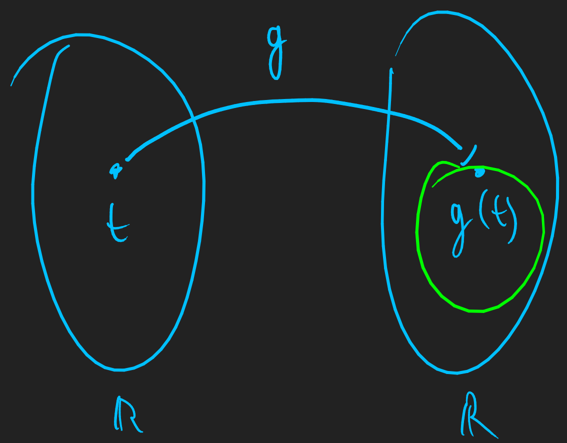


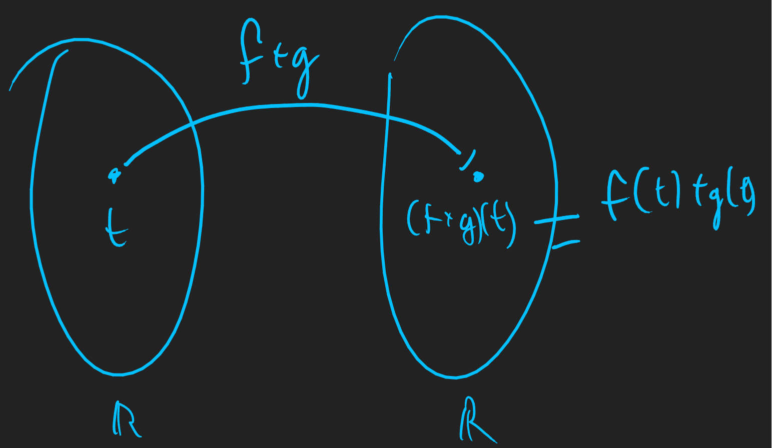
P_n

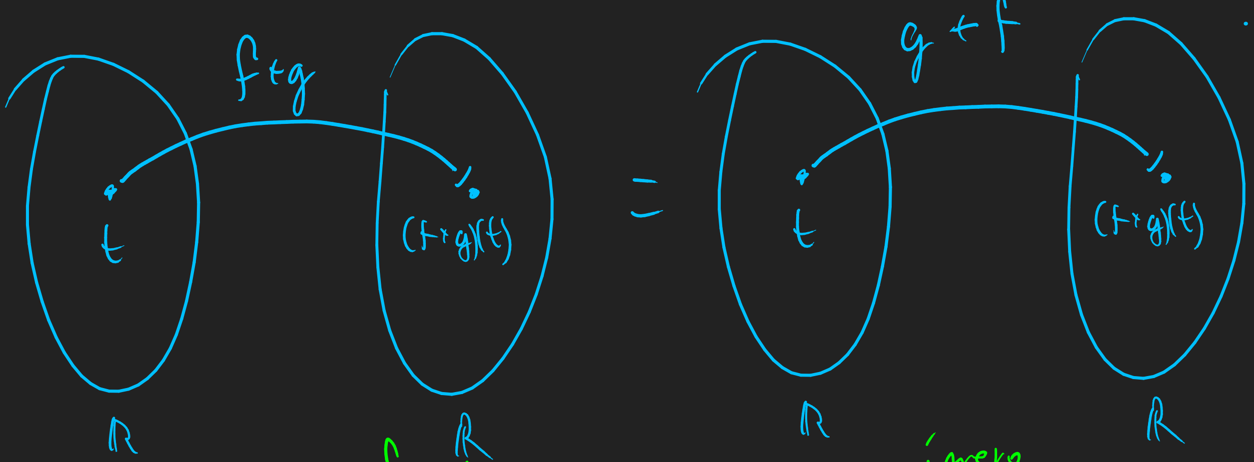
$f(t) = 2t^2$

$h(t) = 2 + 2t^2$

$2 + f(t)$







função

número

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \quad \text{I}$$

$$(g+f)(t) = g(t) + f(t) \quad \text{II}$$

comutativa

$$= f(t) + g(t) = (f+g)(t)$$

(a) $\mathbb{R}^2$, o conjunto das duplas ordenadas (x_1, x_2) de números reais, com

Escalares $\alpha \in \mathbb{R}$

Adição $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

Multiplicação por escalar $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$

$u = (x_1, x_2)$

$v = (y_1, y_2)$

$u \oplus v = (x_1 \oplus y_1, x_2 + y_2)$

vetor

número $\mathbb{R}$

$v \oplus u = (y_1 \oplus x_1, y_2 + x_2)$

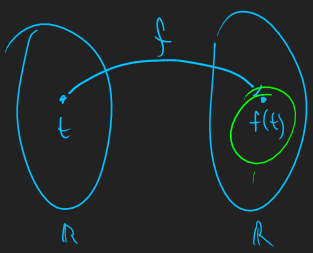
$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

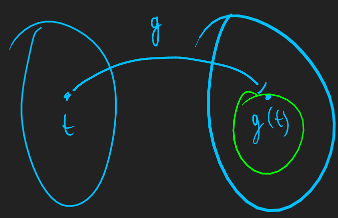
(b) O conjunto das funções a valores reais.

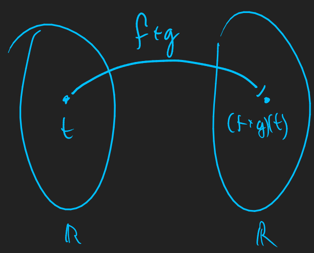
Escalares $\alpha \in \mathbb{R}$

Adição $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$.

Multiplicação por escalar $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$







$= f(t)$

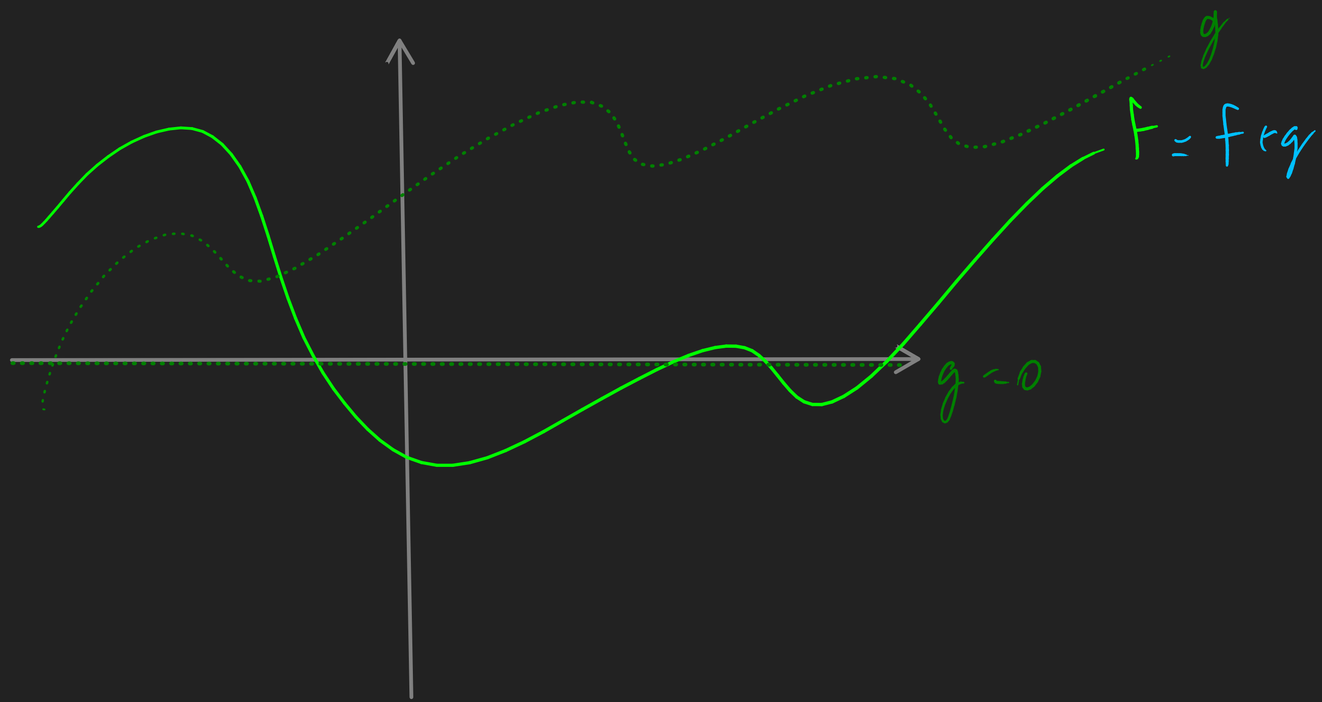
Vetor nulo:

Encontre g tal que f+g = f

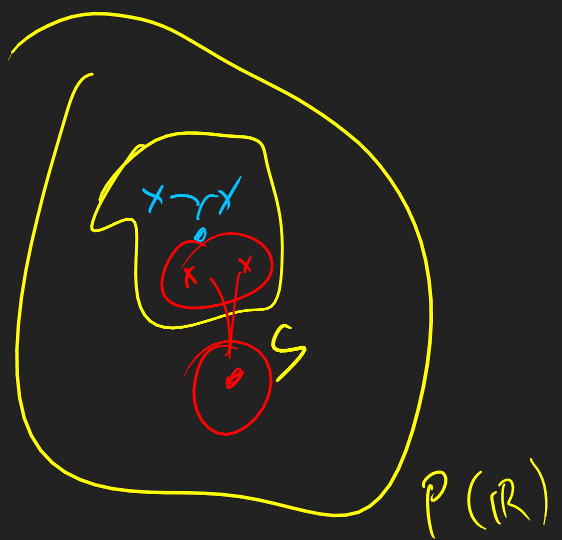
$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$

$f + g = f \Rightarrow (f+g)(t) = f(t) + 0$

$0 = g(t) = 0$ constante



Na aula de exemplo:



definião do subconjunto

$$S = \left\{ p \in P(\mathbb{R}) \;\middle|\; \left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=0} = 0 \right\}$$

S é subespaço de P(ℝ)?

0) $S \subset P(\mathbb{R})$

1) $0 \in S$ ✓

4. Seja $C([0,1])$ o espaço vetorial das funções contínuas no intervalo $[0,1]$. Verifique se os subconjuntos abaixo são subespaços de $C([0,1])$:

(a) $\{f \in C([0,1]) \mid f(0) = 0\}$ (b) $\left\{ f \in C([0,1]) \;\middle|\; \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \right\}$

4. Mostre que os vetores $\boldsymbol{u}_1 = u_1(t) = 1 + 2t + 5t^2$, $\boldsymbol{u}_2 = u_2(t) = 1 + 3t + 7t^2$, $\boldsymbol{u}_3 = u_3(t) = 1 - t - t^2$ ~~não~~ geram o espaço vetorial $\boldsymbol{P}_2(\mathbb{R})$, dos polinômios de grau $\leqslant 2$.

$$v = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$$

$$P_2(\mathbb{R}) = \{\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3\}$$

$$P_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2\}$$

$$\begin{aligned} v &= \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \\ &= \alpha(1 + 2t + 5t^2) + \beta(1 + 3t + 7t^2) + \gamma(1 - t - t^2) \\ &= \alpha + 2\alpha t + 5\alpha t^2 + \beta + 3\beta t + 7\beta t^2 + \gamma - \gamma t - \gamma t^2 \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) + (2\alpha + 3\beta + \gamma) t + (5\alpha + 7\beta - \gamma) t^2 \\ &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \end{aligned}$$

equação vetorial

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a_0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = a_1 \\ 5\alpha + 7\beta - \gamma = a_2 \end{cases}$$

sistema de equações escalares

Este sistema precisa ter solução para QUAISQUER VALORES de a_0, a_1, a_2

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & -1 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -3 - 7 + 2 + 5 + 14 - 15$$

$$= -10 + 7 + 14 - 15$$

$$= -25 + 21 = -4$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ 5\alpha + 7\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ 2\beta - 6\gamma = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \quad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ -4\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

4. Seja W o subconjunto de todos os vetores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de $\mathbb{R}^5$ que satisfazem

$W = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$\}$

(x, y, z, w, t)

3 eq.
5 var.
pelo menos
2 var. livres

Obtenha um conjunto finito de vetores que gera W.

$$\begin{cases} 2x - y + \frac{4}{3}z - w = 0 \\ x + \frac{2}{3}z - t = 0 \\ 3x - y + 2z - w - t = 0 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

$(\frac{1}{3})$

$$\begin{cases} -y + \underbrace{\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right)}_{0} z - w + 2t = 0 \\ x + \frac{2}{3}z - t = 0 \\ -y + \underbrace{\left(2 - 3\frac{2}{3}\right)}_{0} z - w + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{2}{3}z - t = 0 \\ -y - w + 2t = 0 \\ -y - w + 2t = 0 \end{cases}$$

L.D

$$\begin{cases} x + \frac{2}{3}z - t = 0 \\ -y - w + 2t = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$

$$\begin{cases} t = x + \frac{2}{3}z \\ -y - w + 2\left(x + \frac{2}{3}z\right) = 0 \end{cases}$$

$$2x - y + \frac{4}{3}z = w$$

$$\begin{cases} t = x + \frac{2}{3}z \\ w = 2x - y + \frac{4}{3}z \end{cases}$$

x, y, z : variáveis livres.

$$v = (x, y, z, t, w)$$

$$v = (x, y, z, x + \frac{2}{3}z, 2x - y + \frac{4}{3}z)$$

$$W = \left\{ (x, y, z, x + \frac{2}{3}z, 2x - y + \frac{4}{3}z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ x v_1 + y v_2 + z v_3 \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ geram W

$$(x, y, z, x + \frac{2}{3}z, 2x - y + \frac{4}{3}z) =$$

$$= (x, 0, 0, x, 2x) + (0, y, 0, 0, -y) + (0, 0, z, \frac{2}{3}z, \frac{4}{3}z)$$

$$= x(1, 0, 0, 1, 2) + y(0, 1, 0, 0, -1) + z(0, 0, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$$

$$W = \left[\left\{ (1, 0, 0, 1, 2), (0, 1, 0, 0, -1), (0, 0, 1, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}) \right\} \right]_{\text{esp. gerado}}$$

$$W = \text{span}\left\{ (1, 0, 0, 1, 2), (0, 1, 0, 0, -1), (0, 0, 1, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}) \right\}$$

$$W = \left[\{ (1,0,0,1,2), (0,1,0,0,-1), (0,0,3,2,4) \} \right]$$