

7. Obtenha a matriz do operador linear  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$G(x, y) = (2x - 3y, 4x + y)$$

em relação à base  $B = \{\mathbf{u}_1 = (1, -2), \mathbf{u}_2 = (2, -5)\}$  seguindo estes passos:

- Obtenha  $G(\mathbf{u}_1)$  e  $G(\mathbf{u}_2)$ , as imagens dos vetores da base.
- Escreva cada um dos vetores calculados no item anterior como combinação linear dos vetores da base. Obtenha a matriz de coordenadas desses vetores.
- Construa a matriz  $[G]_B$  com as matrizes de coordenadas do item anterior como colunas.

Considere o vetor  $\mathbf{v} = (4, -3) \in \mathbb{R}^2$

- Obtenha  $[\mathbf{v}]_B$ , a matriz de coordenadas de  $\mathbf{v}$  relativa à base  $B$ .
- Calcule  $[G(\mathbf{v})]_B = [G]_B [\mathbf{v}]_B$
- Calcule  $G(\mathbf{v})$  a partir das coordenadas do item anterior.

$$[(x, y)] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

na base  
canônica:  
 $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$

$$a) \quad G(\mathbf{u}_1) = G(1, -2) = (2(1) - 3(-2), 4(1) + (-2))$$

$$G(\mathbf{u}_1) = (8, 2)$$

$$G(\mathbf{u}_2) = G(2, -5) = (2(2) - 3(-5), 4(2) + (-5))$$

$$G(\mathbf{u}_2) = (19, 3)$$

$$G(x, y) = (2x - 3y, 4x + y)$$

$$B = \{\mathbf{u}_1 = (1, -2), \mathbf{u}_2 = (2, -5)\}$$

$$b) \quad G(\mathbf{u}_1) = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2$$

$$G(\mathbf{u}_2) = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2$$

$$(8, 2) = \alpha_1 (1, -2) + \alpha_2 (2, -5)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 8 \\ -2\alpha_1 - 5\alpha_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 8 - 2\alpha_2 \\ -2(8 - 2\alpha_2) - 5\alpha_2 = 2 \end{cases}$$

$$-16 + 4\alpha_2 - 5\alpha_2 = 2 \Rightarrow -\alpha_2 = 18 \Rightarrow \alpha_2 = -18$$

$$\alpha_1 = 8 - 2(-18) = 8 + 36 = 44$$

$$\begin{aligned}
 G(u_1) &= 44(1, -2) - 18(2, -5) \\
 &= (44, -88) - (36, -90) \\
 &= (8, 2) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$[G(u_1)] = \begin{bmatrix} 44 \\ -18 \end{bmatrix} ; [G(u_2)] = \begin{bmatrix} 101 \\ -41 \end{bmatrix}$$

$$[G]_B^B = \begin{bmatrix} 44 & 101 \\ -18 & -41 \end{bmatrix} //$$

Considere o vetor  $v = (4, -3) \in \mathbb{R}^2$

(d) Obtenha  $[v]_B$ , a matriz de coordenadas de  $v$  relativa à base  $B$ .

(e) Calcule  $[G(v)]_B = [G]_B [v]_B$

(f) Calcule  $G(v)$  a partir das coordenadas do item anterior.

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \text{t.q.} \quad (4, -3) = \alpha_1(1, -2) + \alpha_2(2, -5)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 4 \\ -2\alpha_1 - 5\alpha_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 4 - 2\alpha_2$$

$$-2(4 - 2\alpha_2) - 5\alpha_2 = -3$$

$$-8 + 4\alpha_2 - 5\alpha_2 = -3$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 5 \Rightarrow \alpha_2 = -5$$

$$\alpha_1 = 4 + 10 = 14$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \end{bmatrix}$$

(e) Calcule  $[G(\mathbf{v})]_B = [G]_B [\mathbf{v}]_B$

$$\begin{aligned} [G(\mathbf{v})]_B &= [G]_B [\mathbf{v}]_B \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 10 \\ -18 & -41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 111 \\ -47 \end{bmatrix}_B$$

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}) &= 111 \mathbf{u}_1 - 47 \mathbf{u}_2 \\ &= 111(1, -2) - 47(2, -5) \\ &= (111, -222) - (94, -235) \end{aligned}$$

$$G(\mathbf{v}) = (17, 13)$$

$$G(x, y) = (2x - 3y, 4x + y)$$

$$\mathbf{v} = (4, -3)$$

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}) &= G(4, -3) = (2(4) - 3(-3), 4(4) - 3) \\ &= (8 + 9, 16 - 3) = (17, 13) \end{aligned}$$

17. Seja  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  base canônica do  $\mathbb{R}^3$ . Se  $F \in L(\mathbb{R}^3)$  é o operador tal que

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$$

$$F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$$

$$F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1,$$

(a) Determine a matriz  $[F]$  em relação à base canônica.

(b) Mostre que  $[F^3] = [I]$  e, portanto,  $[F^2] = [F^{-1}]$ .

(c) Obtenha a matriz  $[F^{100}]$ .

$$[F^3]$$

$$F^3 = F \circ F \circ F$$

$$[F \circ G] = [F][G]$$

$$[F \circ F \circ F]$$

$$[I] = \underline{1}$$

$$[F^{100}] = [F \circ F \circ \dots \circ F \circ F]$$

(100 vezes)

## Operadores autoadjuntos e operadores ortogonais/unitários

$$\hookrightarrow F: V \rightarrow V$$

Seja  $V$  um espaço vetorial sobre os reais dotado de produto interno

Seja  $B$  uma base ORTONORMAL de  $V$

$$B = \{u_1, \dots, u_n\}$$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$v, w \in V.$$

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

$$w = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n = \sum_j \beta_j u_j$$

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_i \alpha_i u_i, \sum_j \beta_j u_j \right\rangle$$

$$= \sum_i \alpha_i \langle u_i, \sum_j \beta_j u_j \rangle$$

$$= \sum_i \alpha_i \left( \sum_j \beta_j \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{\hookrightarrow \delta_{ij}} \right)$$

$$\langle v, w \rangle = \sum_i \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

$$\text{se } [v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ e } [w]_B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = [\alpha_1 \dots \alpha_n] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = [v]^T [w]$$

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

$$\begin{aligned} \langle u_1, v \rangle &= \langle u_1, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \rangle \\ &= \alpha_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{=1} + \alpha_2 \langle u_1, u_2 \rangle + \dots + \alpha_n \langle u_1, u_n \rangle \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \langle u_1, v \rangle \quad \text{coeficiente de Fourier.}$$

Operador  $F: V \rightarrow V$

$B$ , base ortonormal de  $V$ .

$$\text{Se } [F]_B = ([F]_B)^T$$

Ou seja, se  $[F]$  for simétrica, então  $F$  é um OPERADOR AUTOADJUNTO.

Se  $F^*$  é o operador adjunto de  $F$ :

$$\langle F^*(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle \quad \text{para todos } v, w \in V$$

$$\text{Note } (F^*)^* = F$$

$$[F^*] = [F]^T :$$

$$\begin{aligned} \langle v, F(w) \rangle &= [v]^T [F(w)] \\ &= [v]^T ([F][w]) \\ &= ([v]^T [F]) [w] \\ &= ([F]^T [v])^T [w] \\ &= [F^*(v)]^T [w] \end{aligned}$$

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle F^*(v), w \rangle$$

(NUMA BASE ORTONORMAL)

$$\begin{aligned} (AB)^T &= B^T A^T \\ (A^T B)^T &= B^T (A^T)^T \\ &= B^T A \end{aligned}$$

Logo, o operador cuja matriz é a transposta de  $[F]$  é o operador adjunto a  $F$ .

$$\text{Se } F^* = F, F \text{ é auto adjunto e } [F]^T = [F].$$

$[F]$  matriz SIMÉTRICA

Note: No caso complexo:

$F$  é auto adjunto se e somente se

$$[F]^{\dagger} = [F]$$

$[F]$  matriz HERMITIANA

$$[F] = \left( \overline{[F]} \right)^T //$$

Se  $F$  é auto adjunto:

$$\langle F(u), w \rangle = \langle u, F(w) \rangle = [u]^{\dagger} [F] [w]$$

Em mecânica quântica

$$\underbrace{\langle u | F(w) \rangle}_{\substack{\downarrow \text{bra} \quad \downarrow \text{ket}}} = \underbrace{\langle u | F | w \rangle}_{\substack{\downarrow \\ \text{ELEMENTO DE MATRIZ de } F}} = \langle F(u) | w \rangle$$

Agora base ortônoma:

$$[F] = \begin{bmatrix} [F(u_1)] & [F(u_2)] & \dots & [F(u_n)] \end{bmatrix}$$

$$[F(u_i)] = \begin{bmatrix} \langle u_1, F(u_i) \rangle \\ \langle u_2, F(u_i) \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, F(u_i) \rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle u_1, F(u_i) \rangle \neq \langle u_1, u_i \rangle$$

(em geral)

$$[F] = \begin{bmatrix} \langle u_1, F(u_1) \rangle & \langle u_1, F(u_2) \rangle & \dots & \langle u_1, F(u_n) \rangle \\ \langle u_2, F(u_1) \rangle & \langle u_2, F(u_2) \rangle & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, F(u_1) \rangle & & & \langle u_n, F(u_n) \rangle \end{bmatrix}$$

Se  $F$  é auto adjunto

$$\begin{aligned} \langle u_1, F(u_2) \rangle &= \langle F(u_1), u_2 \rangle \\ &= \langle u_2, F(u_1) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \langle u_1, F(u_1) \rangle & \langle u_2, F(u_1) \rangle \\ \langle u_2, F(u_1) \rangle & \langle u_2, F(u_2) \rangle \end{bmatrix}$$

este bloco fica simétrico  
(hermitiano)

Aplicando o mesmo argumento aos demais elementos,  $[F]$  é simétrica (hermitiana)

## Operadores ORTOGONAIS (UNITÁRIOS)

Matriz Ortogonal

Seja  $A$  matriz quadrada real

$$A \text{ é ortogonal} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot A^T = \mathbb{I} \\ A^{-1} = A^T \end{cases}$$

Caso complexo:

Matriz  $A$  é  
UNITÁRIA

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot A^\dagger = \mathbb{I} \\ A^{-1} = A^\dagger = (\bar{A})^T \end{cases}$$

$$F: V \rightarrow V$$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$  base ortonormal de  $V$ .

$F$  é operador ortogonal  $\Leftrightarrow [F]_B$  é ortogonal (unitário)

- Se  $A$  é uma matriz ortogonal, suas colunas formam um conjunto ortonormal de vetores. O mesmo vale para as linhas

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} \text{--- } v_1 \text{ ---} \\ \text{--- } v_2 \text{ ---} \\ \vdots \\ \text{--- } v_n \text{ ---} \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \langle v_n, v_1 \rangle & - & - & - \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \mathbb{I} \quad \text{se } A \text{ for ortogonal}$$

- Toda matriz ortogonal/unitária é inversível.

- Se  $A$  é ortogonal/unitária,  $\det(A) = \pm 1$

$$A A^T = \mathbb{I}$$

$$\det(A A^T) = \det(\mathbb{I}) = 1$$

$$\det(A A^T) = \det(A) \det(A^T)$$

$$= \det(A) \det(A)$$

$$= (\det(A))^2 = 1$$

$$\det(A) = \pm 1$$

- A matriz mudança de base  $[I]_C^B$ , entre duas bases ortogonais  $B$  e  $C$  de  $V$ , será ortogonal. ortonormais

#### Nota

Nesse caso, conhecida  $[I]_C^B$ , a mudança inversa,  $[I]_B^C = ([I]_C^B)^{-1}$ , é trivial de se calcular: basta transpor a matriz original!

- Todo operador ortogonal/unitário leva uma base ortonormal de  $V$  a outra base ortonormal.

$$F: V \rightarrow V \quad B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ base ortonormal de } V$$

$$C = \{F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n)\}$$

será base ortonormal de  $V$  (,  $n$  vetores L. I.

#### Teorema do Núcleo-Imagem

$$\dim(\ker(F)) + \dim(\text{Im}(F)) = \underbrace{\dim(\text{Dom}(F))}_n = \dim(V)$$

$F$  é injetora  $\rightarrow \downarrow$   $+ \quad n = n$

$\dim(\text{Im}(F)) = \dim(V) = n \rightarrow F$  é sobrejetora.

- Todo operador ortogonal é um isomorfismo, ou seja, uma transformação  $\checkmark$  bijetora.

- Todo operador ortogonal/unitário leva uma base ortonormal de  $V$  a outra base orto.
- Todo operador  $T$  ortogonal é uma isometria e não altera a norma dos vetores:

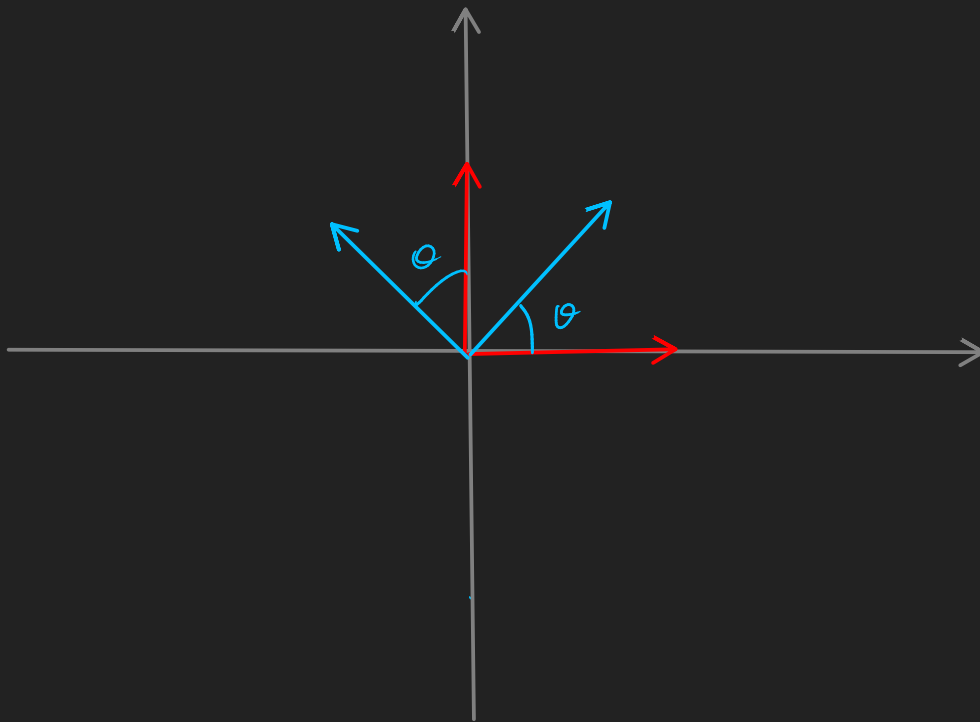
$$\|T(v)\| = \|v\|$$

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R^T = R_{(-\theta)} = R_\theta^{-1}$$

$$R_\theta R_\theta^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

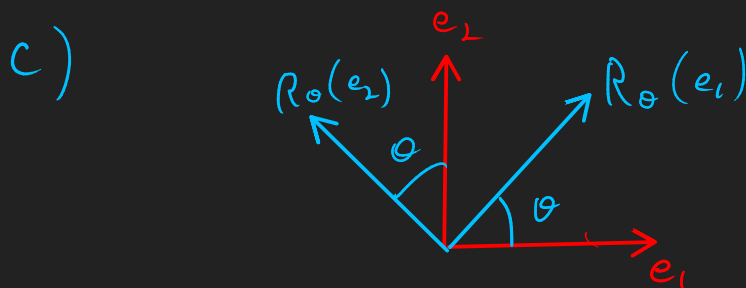


18. Em  $\mathbb{R}^2$ , a transformação  $R_\theta(x, y)$  gira os vetores de um ângulo  $\theta$  em sentido anti-horário. [Nota 3]

- Escreva uma expressão para  $R_\theta(x, y)$ . Para isto, considere o que  $R_\theta$  faz com cada vetor da base canônica.
- Escreva a matriz de rotação  $[R_\theta]$  em relação à base canônica.
- Considere a *base girada*  $B_\theta = \{R_\theta(e_1), R_\theta(e_2)\}$ . Quais as coordenadas de um vetor  $(a, b)$ , após ser transformado por  $R_\theta$  na base canônica e na base girada  $B_\theta$ ?
- Calcule a matriz de rotação por um ângulo  $-\theta$ . Verifique que  $R_{-\theta}$  é a *matriz inversa* de  $R_\theta$ . O que isso significa?

a)  $R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$

b) 
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



$$B_\theta = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\}$$

$v = (a, b)$

$$[R_\theta(a, b)] = [R_\theta] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$[v]_c = [(a, b)]_c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 [R_\theta(a,b)]_{B_\theta} &= [I]_{B_\theta}^C [R_\theta(a,b)]_C \\
 &= [I]_{B_\theta}^C [R_\theta] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}_I \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
 &= I \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$[R_\theta(a,b)]_{B_\theta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{B_\theta}$$

