Notas de aula ECT2202 T03 2022-02-01 Aula 21 — Aplicações de Diagonalização

Autovalores e autovetores de operdores em espaços de dimensão infinita.

→ Equações diferenciais

$$A\frac{d^2f}{dt^2} + B\frac{df}{dt} + Cf = 0$$

diferencial

Equação

$f(t)$: solução $\begin{cases} \text{sen}(\omega t) \\ e^{\lambda t} \\ at^2+bt+c \end{cases}$ função

---

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F = ma$$

$F(t) = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$ Queda livre $\Rightarrow F = mg$ constante.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = g$$

$$\int \frac{d^2x}{dt^2}\,dt = \int g\,dt$$

$$\frac{dx}{dt} + c_1 = gt + c_2 \Rightarrow \quad c_2 - c_1 = v_0$$

$$\int \frac{dx}{dt}\,dt = \int gt + v_0\,dt$$

$$x(t) + c_3 = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + c_4 \qquad c_4 - c_3 = x_0$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

FAMÍLIA de soluções

$v(t=0)=0$ $\to$ $x(t=0)=2$

Um corpo foi solto do repouso de uma altura h = 2,0m e deixado cair sob ação da gravidade.
Escreva a função horária (posição em função do tempo) desse corpo.

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + g\dfrac{t^2}{2} \\ v(t) = \dfrac{dx}{dt} = v_0 + gt \end{cases}$$

Condições iniciais:

$$v(t=0) = v_0 + 0g$$

repouso => v(t=0) = 0
altura inicial 2,0m => x(t=0) = 2

$$\to v(t=0) = v_0 \Rightarrow v_0 = 0$$

$$\to 2 = x(t=0) = x_0 + 0v_0 + \frac{0^2}{2}g$$

$$2 = x_0.$$

$$x(t) = 2 + 0t + g\frac{t^2}{2} \Rightarrow x(t) = 2 + g\frac{t^2}{2}$$

$$g \simeq -9{,}81\ m/s^2$$

Problema de valor inicial:

- Equação diferencial (ordinária)
- Condições iniciais.

Problema de condições de contorno

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial T}{\partial x}$$

Equação diferencial parcial

Autovalores e autovetores de operadores diferenciais.

$$\frac{df}{dt} = \lambda f$$

$$\frac{d}{dt} : \text{operador } C^\infty \to C^\infty$$

$f(t) = e^{\lambda t}$: Ansatz $\to$ "chute"

teste o chute:

$\frac{df}{dt} = \lambda f$ $\qquad f(t) \stackrel{?}{=} Ae^{\lambda t}$ $\qquad$ A cte.

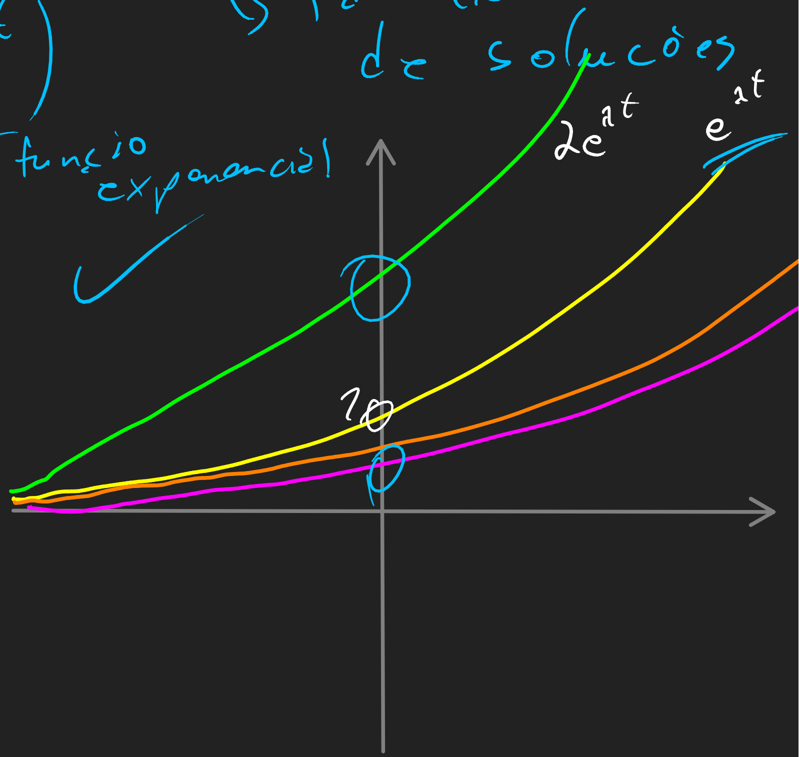
↳ família de soluções

$\frac{d}{dt}(Ae^{\lambda t}) = \lambda(Ae^{\lambda t})$

↳ função exponencial ✓

$A\lambda e^{\lambda t} = A\lambda e^{\lambda t}$

$f(t=0) = k$



$\frac{df}{dt} = \lambda f$ $\qquad D = \frac{d}{dt}$: operador linear

$C^\infty \to C^\infty$

Equação de Autovalores

C^∞ é o espaço vetorial das funções que podem ser derivadas infinitamente

$D(f) = \lambda f$

f: autovetor de $\frac{d}{dt}$

λ: autovalor.

$f(t) = Ae^{\lambda t}$ →

↳ família (conjunto de soluções L. D.)

$f(t) = Ae^{\lambda t} \in \ker\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)$

↳ solução

Teorema de Picard:

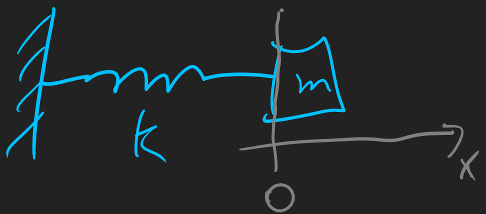
$$\frac{df}{dt} = \lambda f \qquad \dim\left(\ker\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)\right) = 1$$

(teorema de existência e unicidade da solução da eq. dif)

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \lambda f \implies \dim\left(\ker\left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda\right)\right) = 2$$

A solução geral dessa eq. será a combinação linear de DUAS soluções L.I.

Sistema massa-mola:



$$F = -kx$$

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Eq.:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \implies$$ equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda x \qquad \left(\lambda = \frac{-k}{m}\right)$$ equação de autvalores do operador D^2

Qual função é proporcional à sua segunda derivada com sinal trocado?

$$\left.\begin{aligned} x_1(x) &= A\,\mathrm{sen}(\omega t) \\ x_2(x) &= B\cos(\omega t) \end{aligned}\right\}$$

Já vimos (unidade 1) que sen(ωt) e cos(ωt) são L.I.

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \underbrace{-\frac{k}{m}}_{\lambda} x_1 \qquad x_1(t) = A\,\text{sen}(\omega t)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d x_1}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\underbrace{A\omega}_{\text{const}} \cos(\omega t)\right)$$

$$= A\omega\left(-\omega\,\text{sen}(\omega t)\right)$$

$$= -\omega A\,\text{sen}(\omega t)$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\omega^2 f_1(t)$$

$$= -\frac{k}{m} f_1(t)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x_1(t) = A\,\text{sen}(\omega t) = A\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

↳ Autovetor de D^2

$$\text{autovalor} = -\frac{k}{m}$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \lambda x_1 \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\lambda = -\frac{k}{m} \\ &x_1 = A\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \lambda x_2 = \begin{aligned} &\lambda = -\frac{k}{m} \\ &x_2 = B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)\end{aligned}$$

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

A, B const. arbitrárias: cond. inicial.

$$x(t=0)=0, \quad v(t=0)=v_0$$

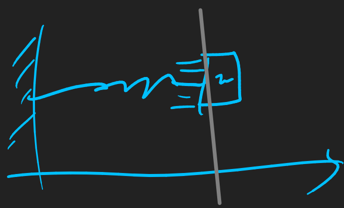
$$x(t=0) = A\,\underbrace{\text{sen}(\omega\cdot 0)}_{\to 0} + B\,\underbrace{\cos(\omega\cdot 0)}_{\to 1}$$

$$0 = B$$

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t) \leftarrow \text{autovetor.}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t) = v_0$$

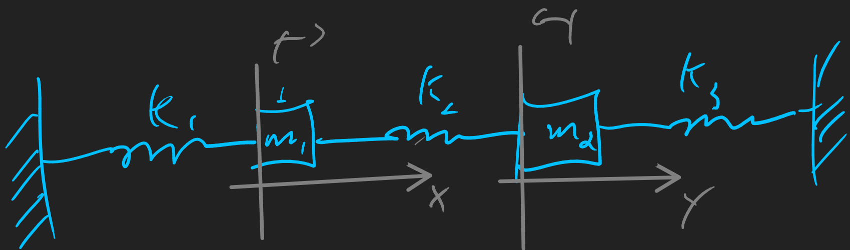
$$A = \frac{v_0}{\omega}$$



$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\,\text{sen}(\omega t)$$

↳ Amplitude

$$x(t) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$



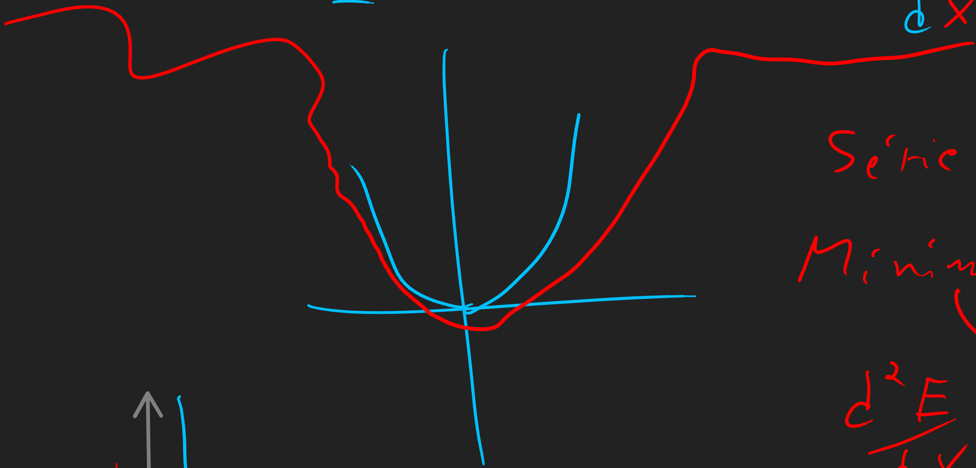
Videoaula 21

$$\begin{cases} \dfrac{d^2p}{dt^2} = -\lambda_1 p \\[2mm] \dfrac{d^2q}{dt^2} = -\lambda_2 q \end{cases} \longrightarrow \text{EDO } 2^{\underline{a}} \text{ ordem.}$$

$$p(t) = A\,\text{sen}(\omega_1 p) + B\cos(\omega_2 p)$$

Próximo ao equilíbrio estável, TUDO é um oscilador harmônico.

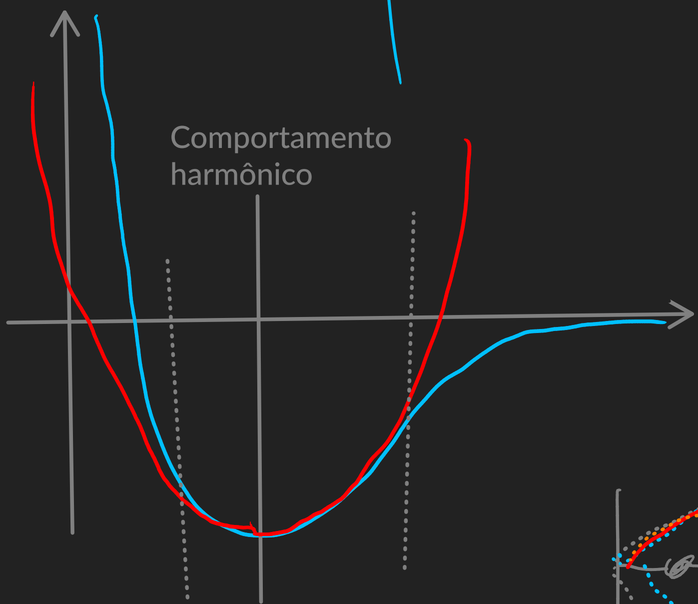
$$E_{pot} = \frac{kx^2}{2} \qquad F = -\frac{dE}{dx} \qquad F = -\vec{\nabla}E$$

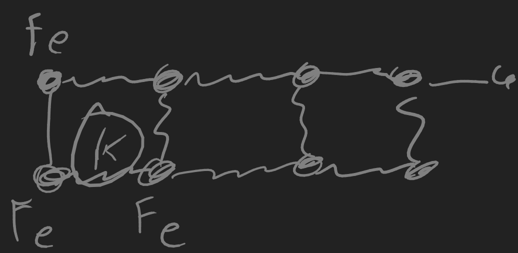


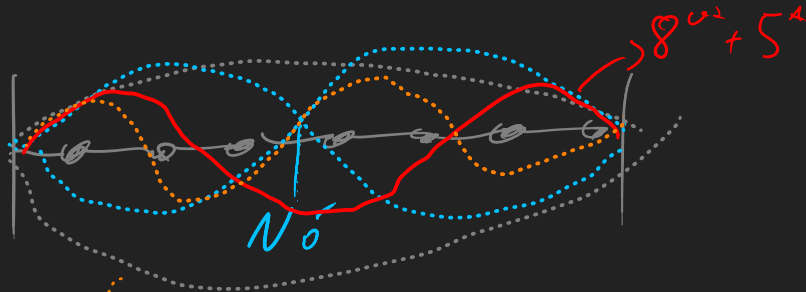
Série de Taylor

Mínimo local: $\frac{dE}{dx} = 0$

$$\frac{d^2E}{dx^2} > 0$$







Autovetores da equação da onda na corda

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x$$ — número de infectados; x → população

corona (latim coroa)

$\frac{dx}{dt}$: taxa de crescimento

λ: número de pessoas que pegam o vírus de alguém.

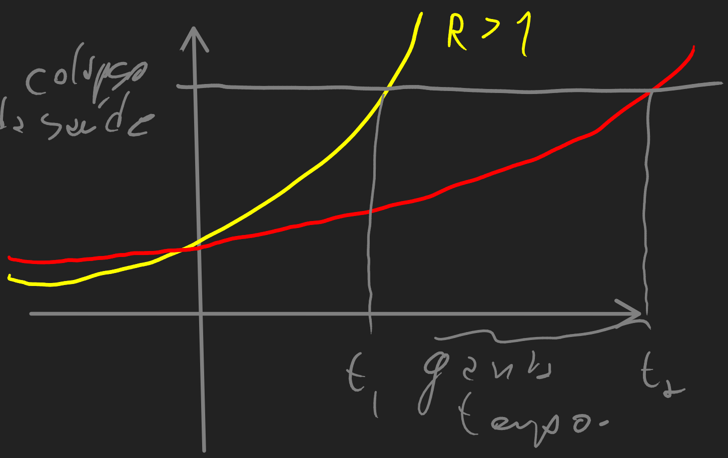
$$\frac{dx}{dt} = R x \leftarrow$$

↳ fator de crescimento

$R > 1$; $x(t) = A e^{Rt}$

$0 < R < 1$

$x(t) = A e^{Rt}$



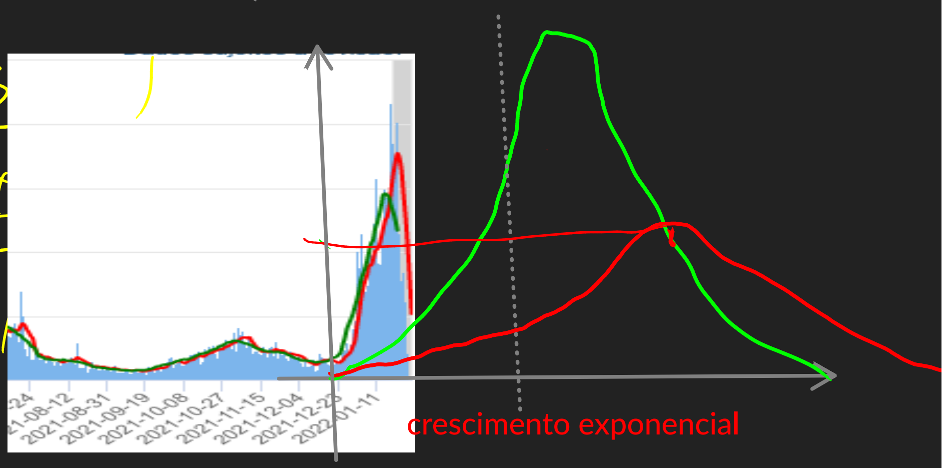
Sistema SIR

↳ Removidos.

↳ infectados.

↳ suscetível.

$$\begin{cases} I = K_1(S \\ R = K_2(I \\ S = (I - \end{cases}$$



1,19	**1,05**
Média do R(t) da Última Semana	Média do R(t) da Última Quinzena

6. Considere o operador linear $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que tem os autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ e que o vetor $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1)$ é o autovetor associado ao autovalor λ_1 e $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 1)$ é o autovetor associado ao autovalor λ_2.

(a) Calcule $F(1, 1)$ e $F(-1, 1)$.

(b) Calcule $F(2, 2)$ e $F(1, -1)$.

$F(v) = \lambda v$

↳ autovetor

↳ autovalor

$\begin{cases} v_1 = (1,1) \\ \lambda_1 = 1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} v_2 = (-1,1) \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

$F(1,1) = \lambda_1 (1,1)$

$F(1,1) = (1,1)$

$F(-1,1) = \lambda_2 (-1,1)$

$F(-1,1) = -(-1,1)$

$F(-1,1) = (1,-1)$

6. Considere o operador linear $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tem os autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ e que o vetor $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1)$ é o autovetor associado ao autovalor λ_1 e $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 1)$ é o autovetor associado ao autovalor λ_2. Escreva uma expressão para $F(x, y)$.

(a) Calcule $F(1, 1)$ e $F(-1, 1)$.

(b) Calcule $F(2, 2)$ e $F(1, -1)$.

(c) Escreva a matriz $[F]_B$ na base $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ de autovetores de F. Lembre-se que $[\boldsymbol{v}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Escreva os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos autovetores.

(e) Calcule $F(1, 0)$ e $F(0, 1)$.

(f) Escreva uma expressão para $F(x, y)$.

(g) Escreva as matrizes mudança de base $[I]_C^B$ da base de autovetores para a base canônica e $[I]_B^C$ da base canônica para a base de autovetores. Note que não é preciso inverter nenhuma matriz e você pode usar o resultado ditem (d).

(h) Verifique que $[F]_C = [I]_C^B [F]_B [I]_B^C$.

$F(2,2) = F(2(1,1)) = 2F(1,1)$