Notas de aula ECT2202 T03 2021-12-09 Aula 13 — Núcleo e Imagem

5. Considere a transformação linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que, ao atuar sobre os vetores da base canônica, resultam em

$$\boxed{\begin{cases} F(\boldsymbol{e}_1) = F(1,0,0) = (-1,2,1) \\ F(\boldsymbol{e}_2) = F(0,1,0) = (0,1,-1) \\ F(\boldsymbol{e}_3) = F(0,0,1) = (1,-1,0) \end{cases}}$$

(a) Calcule $F(-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3)$ $\quad -F(e_1) + 2F(e_2) + 3F(e_3)$

(b) Calcule $F(-1,2,3)$ $\quad (-1,2,3) = -e_1 + 2e_2 + 3e_3$ 2

(c) Calcule $F(x,y,z)$

$$F(x,y,z) = \boxed{F(x(1,0,0)} + y(0,1,0) + z(0,0,1))$$

$$= \boxed{x\, F(1,0,0)} + y\, F(0,1,0) + z\, F(0,0,1)$$

$$= x(-1,2,1) + y(0,1,-1) + z(1,-1,0)$$

$$F(x,y,z) = (-x+z,\ 2x+y-z,\ x-y)$$

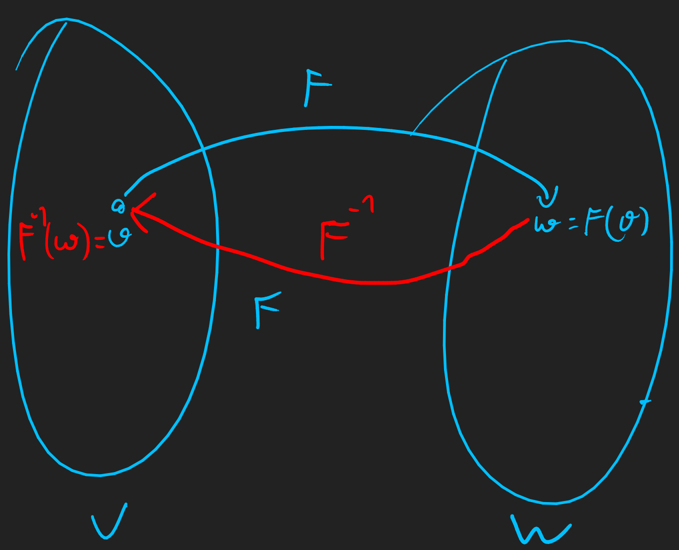
Isomorfismo:

Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo

Se dim(V) = dim(W) então V e W são ISOMORFOS

Se F:V→W é uma transformação linear bijetora F é um ISOMORFISMO

(PORTANTO INVERSÍVEL)



F^{-1} transformação inversa de F

$F^{-1} : W \to V$

F^{-1} ser transf linear necessário

F injetora

Para que $D(F^{-1}) = W$ é necessário F SOBREJETORA

$T: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ $\quad \dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$$\begin{cases} F \text{ injetora} \iff \dim(\ker(F)) = 0 \\ F \text{ sobrejetora} \iff Im(F) = CD(F) \\ \qquad \dim(Im(F)) = \dim(CD(F)) \end{cases}$$

$$0 \leq \dim(\ker(F)) \leq \dim(D(F))$$

↳ F injetora.

F é nula

$$0 \leq \dim(Im(F)) \leq \dim(CD(F))$$

↳ F sobrejetora

Teorema núcleo-Imagem TNI

$$\dim(\ker(F)) + \dim(Im(F)) = \dim(D(F))$$

F bijetora $\downarrow$ inj $\qquad \downarrow$ sobre

$$0 + \dim(CD(F)) = \dim(D(F))$$

↳ condição necessária para F bijetora

↓

isomorfismo.

Se $\dim(V) = \dim(W) = n$ existe F bijetora, ou seja, isomorfismo, entre V e W

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$C = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de W

$F : V \to W$ $\begin{cases} F(v_1) = w_1 \\ \vdots \\ F(v_n) = w_n \end{cases}$ $\to$ é bijetora

$w \in W \Rightarrow w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$

$= \alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_n F(v_n)$

$P_2(\mathbb{R}) \to M_{3\times 1}(\mathbb{R})$

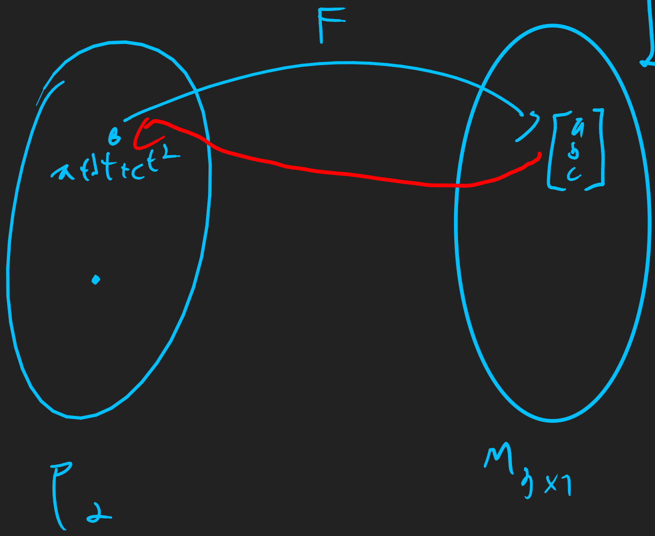
$\dim(P_2) = 3$ $\quad \dim(M_{3\times1}) = 3 \longrightarrow$ isomorfos

$F : P_2 \to M_{3\times1}$

$F(a+bt+ct^2) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Linear, bijetora, isomorfismo } exercício

matriz de coordenadas na base canônica de P_2



$F^{-1}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = a+bt+ct^2$

$F: V \to V$ operador linear

Se F for bijetora, isomorfismo $\Rightarrow$ F é automorfismo

---

Exemplo

$$0 = p(t) = 0 = 0 + 0t + 0t^2$$

$$F: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$$

$$F(a + bt + ct^2) = (a+b) + (-a-b)t + ct^2$$

Base e dimensão de ker(F)
Base e dimensão de Im(F)

a) $\ker(F) = \{ a + bt + ct^2 \mid F(a+bt+ct^2) = 0 \}$

$$F(a+bt+ct^2) = 0$$

$$(a+b) + (-a-b)t + ct^2 = 0 + 0t + 0t^2$$

equação vetorial

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a - b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -b \\ c = 0 \end{matrix}$$

$$p(t) = a - at + 0t^2 \in \ker(F)$$

$$a(1-t) \in \ker(F)$$

$$\ker(F) = \operatorname{span}\{1-t\}$$

$\{1-t\}$ é base de $\ker(F)$

$$\dim(\ker(F)) = 1$$

$$F(a+bt+ct^2) = (a+b) + (-a-b)\,t + ct^2$$

T.N.I.: $\dim(\ker(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(D(F))$

$$\underbrace{\dim(\ker(F))}_{1} + \dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(P_2(\mathbb{R}))$$

$$\dim(\mathrm{Im}(F)) = 3-1 = 2$$

Gerador $\mathrm{Im}(F)$.

$F(B)$ $\qquad B = \{1, t, t^2\}$ é base do DOMÍNIO de F

$F(a+bt+ct^2) = (a+b) + (-a-b)\,t + ct^2$

$$\begin{cases} F(1) = 1 - t \\ F(t) = 1 - t \\ F(t^2) = t^2 \end{cases}$$

F não é injetora

$F(B) = \{1-t, 1-t, t^2\}$ gerador de $\mathrm{Im}(F)$

(L.D.)

$\mathrm{Im}(F)$ tem 2 vetores na base

$\{1-t, t^2\}$ é gerador de F.

como possui 2 elementos e dim(Im(F)) = 2, então é BASE de Im(F).

$\{1-t, t^2\}$ é base de $\mathrm{Im}(F)$

$$\dim(\mathrm{Im}(F)) = 2$$

$$p(t) = x(1-t) + y\,t^2 \in \mathrm{Im}(F).$$

F é injetora? Não

F é sobrejetora? Não

$1+t \notin Im(F)$.

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad$ $\dim Im(T) \leq 2$

$$T(x,y) = (x+y, x-y, x)$$
$$= (x,x,x) + (y,-y,0)$$
$$= x(1,1,1) + y(1,-1,0)$$

$\{(1,1,1),(1,-1,0)\}$ é gerador de $Im(F)$

L.I portanto base de $Im(F)$

$\dim(Im(F)) = 2 \Rightarrow \dim(\ker(F)) = 0$

$\ker(F) = \{(0,0)\}$ //

$$T: M_{2\times 2} \to M_{3\times 1} \quad \dim(M_{3\times 1}) = 3$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+c \\ b+c \\ c \end{bmatrix}$$

Base e dimensão de ker(T)
Base e dimensão de Im(T)

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to 0_{M_{3\times 1}}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a+c \\ b+c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eq. vetorial

$$\begin{cases} a+c = 0 \\ b+c = 0 \\ c = 0 \\ d \text{ é livre} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{matrix} \Rightarrow \ker(T) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right\}$$

$$d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \ker(T)$$

$$\dim(\ker(T)) = 1$$

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(D(T))$$

$$1 + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4$$

$\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é base de $\ker(T)$.

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 4 - 1 = 3$$

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq \dim(CD(T)) = 3$$

T não é injetora.

T é sobrejetora $(\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(CD(T)))$

Base de Im(T):

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{e_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{e_4} \right\}$$

Base (canônica) do domínio de T

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+c \\ b+c \\ c \end{bmatrix}$$

$$T(B): \begin{cases} T(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ T(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ T(e_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T(e_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$T(B) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \cancel{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

gerador de Im(F)

L.D.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow \text{L.I.}$$

Base de Im(F)

$\ker(T) = \{0\}$

convenção

$\dim(\{0\}) = 0$

$B = \{0\}$ L.D.

$\text{Base} = \{\}$

$$\begin{cases} [illegible]\,x + [illegible]\,y + [illegible]\,z = 0 \\ [illegible]\,x + [illegible]\,y + [illegible]\,z = 0 \\ [illegible]\,x + [illegible]\,y + [illegible]\,z = 0 \end{cases}$$

$(x, y, z) = (0, 0, 0)$