

Transf. lineares:

Transf. Lineares	Matrizes de transformações
2021 Lista 2.1 17/12	2022 Lista 2.2. 19/01

função : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

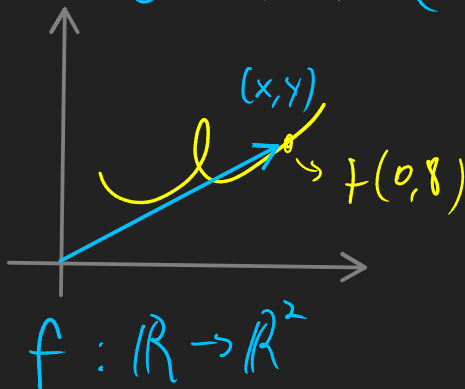
$f(x) = \sin(x)$

$\sin(\pi/2) = 1$

$\text{Im}(\sin) = [-1, 1]$

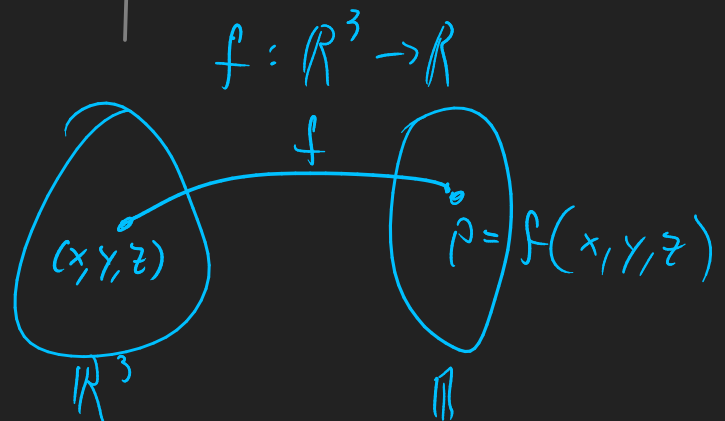
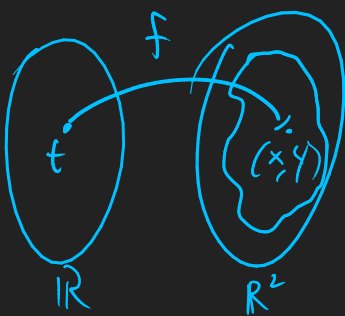
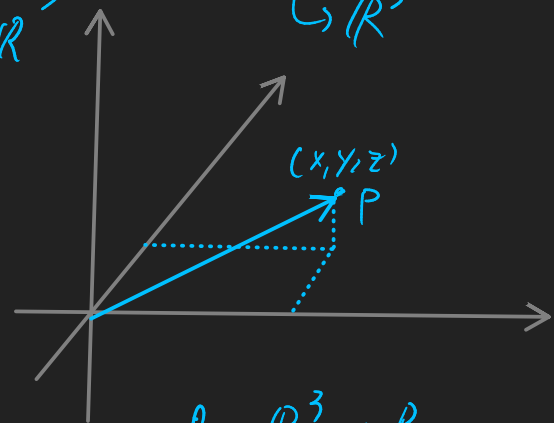
funções vetoriais (curvas)

$\vec{c} = f(t) = (x(t), y(t))$



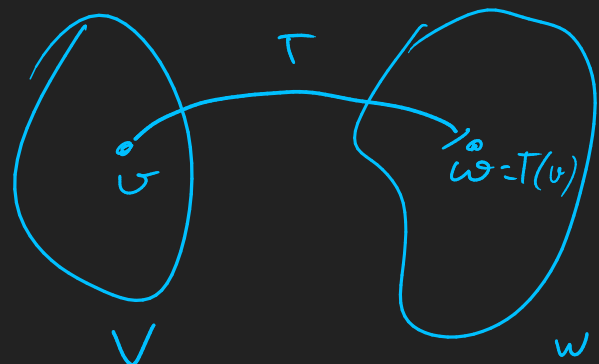
funções de várias variáveis

$P = f(x, y, z)$



Transformações
Aplicações
Mapas

$T: V \rightarrow W$



Exemplo

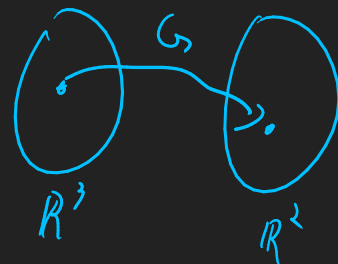
$$G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$G(x, y, z) = (x + 2y - 4z, 2x + 3y + z)$$

Lei expressiva

$$u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$G(u) = G((x, y, z)) = G(x, y, z)$$



$$\text{Calcule } G(2, 4, -5)$$

$$G(2, 4, -5) = (2 + 2(4) - 4(-5), 2(2) + 3(4) + (-5))$$

$$= (30, 11) \in \mathbb{R}^2$$

G é a transformação

$(2, 4, -5)$ é um vetor do domínio

sen é a função

$\pi/2$ é um número real, elemento do domínio

$G(2, 4, -5)$
 $(30, 11)$ é um vetor do contradomínio
 imagem de (x, y, z) por G
 "....."valor"..... de G aplicado em (x, y, z)

$\text{sen}(\pi/2)$
 1 é o valor da função seno aplicada em $\pi/2$, NÚMERO REAL elemento do contradomínio

~~$$G(2, 4, -5) = G(30, 11)$$~~

vetor de \mathbb{R}^3

~~$$\text{sen}(\pi/2) = \text{sen}(1)$$~~

A transformação G é linear?

Aditividade
Homogeneidade

$$G(u + v) = G(u) + G(v)$$

\mathbb{R}^3 \mathbb{R}^2

$$G(\lambda u) = \lambda G(u)$$

$$G(x, y, z) = (x + 2y - 4z, 2x + 3y + z)$$

$$u = (x, y, z) \quad v = (a, b, c) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Aditividade:

$$\begin{aligned} G(u+v) &= G((x, y, z) + (a, b, c)) \\ &= G(x+a, y+b, z+c) \\ &= \left((x+a) + 2(y+b) - 4(z+c), 2(x+a) + 3(y+b) + (z+c) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(u) + G(v) &= G(x, y, z) + G(a, b, c) \\ &= (x + 2y - 4z, 2x + 3y + z) + (a + 2b - 4c, 2a + 3b + c) \\ &= \left((x+a) + 2(y+b) - 4(z+c), 2(x+a) + 3(y+b) + (z+c) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Logo } G(u+v) = G(u) + G(v)$$

E a transformação G é aditiva

$$\text{Homogeneidade: } G(\lambda(x, y, z)) = \lambda G(x, y, z)$$

exercício

Logo G é linear

$$G(x, y, z) = x G(1, 0, 0) + y G(0, 1, 0) + z G(0, 0, 1)$$

Todo vetor de $\text{Im}(G)$ é combinação linear de $G(1, 0, 0) + G(0, 1, 0) + G(0, 0, 1)$

$\text{Im}(G)$ é o espaço vetorial gerado por $\{G(1, 0, 0), G(0, 1, 0), G(0, 0, 1)\}$

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \text{ base de } \mathbb{R}^3 \text{ do } D(G)$$

$$G(B) = \{G(1, 0, 0), G(0, 1, 0), G(0, 0, 1)\} \text{ gerador de } \text{Im}(G)$$

$$G(x, y, z) = (x + 2y - 4z, 2x + 3y + z)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} G(1, 0, 0) &= (1, 2) \\ G(0, 1, 0) &= (2, 3) \\ G(0, 0, 1) &= (-4, 1) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

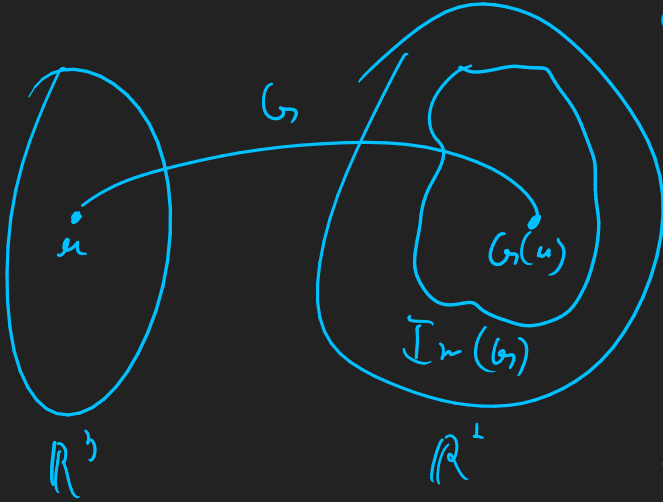
ELEMENTOS DE MATRIZ

$$\{(1, 2), (2, 3), (-4, 1)\}$$

gerador $\text{Im}(G)$

Logo $\text{Im}(G)$ é um espaço vetorial

Como $\text{Im}(G) \subset \mathbb{R}^2$ então $\text{Im}(G)$ é SUBESPAÇO de \mathbb{R}^2



$$\{(1, 2), (2, 3), (-4, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$$

é BASE de $\text{Im}(G)$?

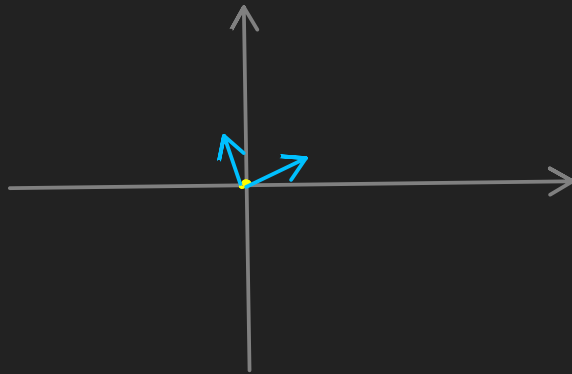
não, pois é LD já que possui 3 elementos, mais que a dimensão de \mathbb{R}^2

$$\{(1, 2), (2, 3)\} \text{ é L.T. e ger. } \text{Im}(G)$$

portanto é base de $\text{Im}(G)$

Logo, $\text{Im}(G) = \mathbb{R}^2$

$$\{(1, 2), (2, 3)\} \text{ é base de } \mathbb{R}^2$$



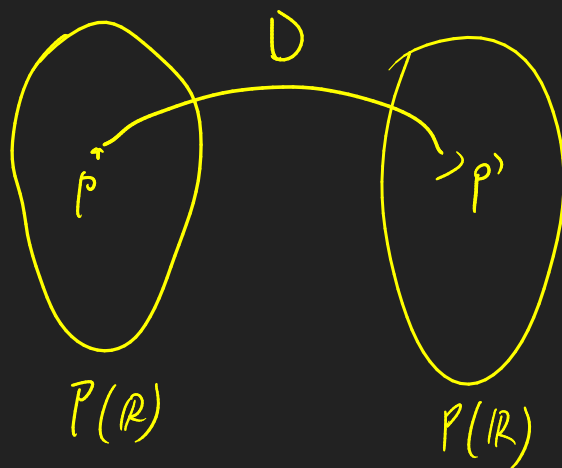
Como $\text{Im}(G) = D(G)$ então G é uma transformação sobrejetora

$$\begin{aligned} G(2, -1, 5) &= G(2(1, 0, 0) - 1(0, 1, 0) + 5(0, 0, 1)) \\ &= 2G(1, 0, 0) + (-1)G(0, 1, 0) + 5G(0, 0, 1) \\ &= 2(1, 2) - 1(2, 3) + 5(-4, 1) \\ &= (2 - 2 - 20, 4 - 3 + 5) \\ &= (-20, 6) \end{aligned}$$

$$D: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$$

$$D(p) = \frac{dp}{dt} = p'$$

D é linear:



$$D(p+q) = \frac{d}{dt}(p+q)$$

$$= \frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dt} = D(p) + D(q) \quad \rightarrow \text{Aditividade!}$$

$$D(\lambda p) = \frac{d}{dt}(\lambda p) = \lambda \frac{dp}{dt} = \lambda D(p) \quad \rightarrow \text{Homogeneidade!}$$

Logo D é linear

$$D(a+bt+ct^2) = D(a(1) + b(t) + c(t^2))$$

$$= aD(1) + bD(t) + cD(t^2)$$

$$= a \frac{d}{dt}(1) + b \frac{d}{dt}(t) + c \frac{d}{dt}(t^2)$$

$$= a(0) + b(1) + c(2t) //$$

$$D(a+bt+ct^2) = \frac{d}{dt}(a+bt+ct^2)$$

$$= \frac{da}{dt} + \frac{d}{dt}(bt) + \frac{d}{dt}(ct^2)$$

$$= 0 + b \frac{dt}{dt} + c \frac{dt^2}{dt}$$

$$= 0 + b + 2ct //$$

$$T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$$

$$T(a+bt+ct^2) = b+ct-3at^2$$

$$T(1-2t+3t^2) = (-2) + (3)t - 3(1)t^2$$

$$\begin{array}{l} a=1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{array} \quad = -2+3t-3t^2$$

Obtenha $p(t) = a + bt + ct^2$ tal que $T(p) = -2 + 3t - 3t^2$

$$T^{-1}(-2+3t-3t^2) = a+bt+ct^2$$

transformação inversa

$$\left\{ \begin{array}{l} T(a+bt+ct^2) = b+ct-3at^2 \\ T(a+bt+ct^2) = -2+3t-3t^2 \end{array} \right.$$

definição da transformação T

IMAGEM esperada de $T(a+bt+ct^2)$

$$b+ct-3at^2 = -2+3t-3t^2 \leftarrow$$

$$\begin{cases} b = -2 \\ c = 3 \\ -3a = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases} \leftarrow$$

$$\rightarrow T(1-2t+3t^2) = -2+3t-3t^2$$

$$M: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad M(a+bt+ct^2) = (a, b, c)$$

$$F(x, y, z) = (y, 2z, -3x)$$

$$(x, y, z) \text{ tal que } F(x, y, z) = (-2, 3, -3)$$

1. Considere a transformação $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y) = (x, x + y, y^2)$. Sejam $\mathbf{u} = (1, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 2)$ vetores de \mathbb{R}^2 e $\lambda = -2$ um escalar real. Calcule:

e. $F(\lambda\mathbf{u})$

f. $\lambda F(\mathbf{u})$

$$\begin{aligned} \text{e) } F(\lambda\mathbf{u}) &= F(-2(1, -1)) = F(-2, 2) \\ &= (-2, -2 + 2, (2)^2) = (-2, 0, 4) \end{aligned}$$

$$\text{e. } F(\lambda\mathbf{u}) = F(-2(1, -1)) = F(-2, 2) = (-2, 0, 4)$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lambda F(\mathbf{u}) &= -2 F(1, -1) = -2(1, 1 + (-1), (-1)^2) \\ &= -2(1, 0, 1) \\ &= (-2, 0, -2) \end{aligned}$$

$$\text{f. } \lambda F(\mathbf{u}) = -2F(1, -1) = -2(1, 0, 1) = (-2, 0, -2)$$

2. Considere a transformação $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ dada por $G(x, y, z) = (x + y) + zt + xzt^2$. Sejam $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 2, -1)$ vetores de \mathbb{R}^3 e $\lambda = 3$ um escalar real. Calcule:

e. $G(\lambda\mathbf{u})$

f. $\lambda G(\mathbf{u})$

$$\begin{aligned} \text{e) } G(\lambda\mathbf{u}) &= G(3(1, -1, 2)) = G(3, -3, 6) \\ &= (3 + (-3)) + 6t + 3(6)t^2 \\ &= 0 + 6t + 18t^2 \end{aligned}$$

$$\text{e. } G(\lambda\mathbf{u}) = G(3(1, -1, 2)) = G(3, -3, 6) = (3 - 3) + 6t + (1)(2)t^2 = 6t + 2t^2$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lambda G(\mathbf{u}) &= 3 G(1, -1, 2) \\ &= 3 \left[(1 + (-1)) + 2t + 1(2)t^2 \right] \\ &= 6t + 6t^2 \end{aligned}$$

$$\text{f. } \lambda G(\mathbf{u}) = 3G(1, -1, 2) = 3(2t + 2t^2) = 6t + 6t^2$$

