Notas de aula ECT2202 T03 2021-11-25 Aula 10 — MMQ e dúvidas

Revisão, dúvidas produto interno

Produto interno: QUALQUER operação entre 2 vetores que resula em um escalar e segue os 4 axiomas

Definição

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um *produto interno* transforma cada par ordenado de vetores $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de V em um único número real denotado por $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ e obedece aos seguintes axiomas:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geqslant 0$, sendo que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

$\mathbb{C}$

$\mathbb{R}^2$:

$$\langle (x,y),(a,b) \rangle = xa + yb$$

(produto escalar)

(produto interno ususal do $\mathbb{R}^2$)'

(canônico)

ou:

$$\langle (x,y),(a,b) \rangle = 2xa + ya + xb - yb$$

Esp. vetorial $\mathbb{R}^2$:

1) $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$

2) $(x,y) + (a,b) = (x+a, y+b)$ (definição de adição)

3) $\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$ (definição de multiplicação por escalar)

Com produto interno USUAL

$$\langle (x,y),(a,b) \rangle = xa + yb$$

definido

Seja esp. vet. $\mathbb{R}^2$ com produto interno dado por

$$\langle (x,y),(a,b) \rangle = 2xa - xb - ya + 5yb$$

No $\mathbb{R}^n$: $\langle (x_1,\dots,x_n),(a_1,\dots,a_n) \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k$

Produto interno ususal no $\mathbb{R}^n$

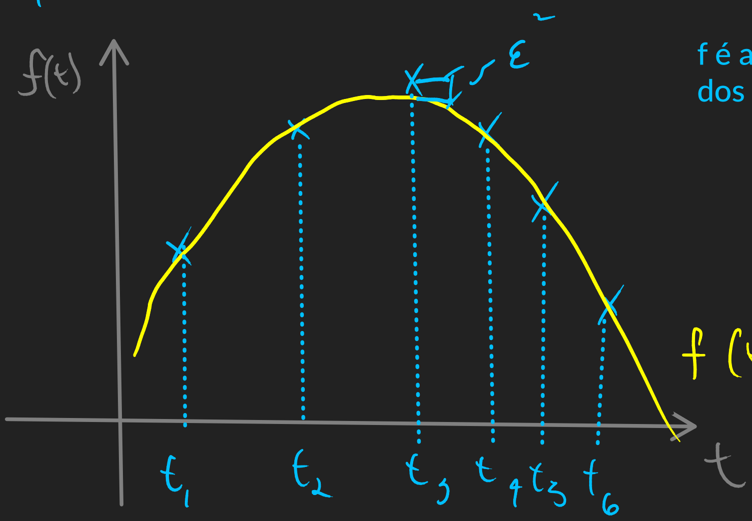
No espaço das funções contínuas:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$$

$$\langle f, g\rangle = \int_{a}^{b} f(t)\, w(t)\, g(t)\, dt$$ ← também é produto interno

$w(t)$ ↳ fixa

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, g(t_i) = f(t_1)g(t_1) + f(t_2)g(t_2) + \dots$$



f é a curva MAIS PRÓXIMA dos pontos marcados

↳ dist.
norma
prod. interno

$f(t) = a + bt + ct^2$

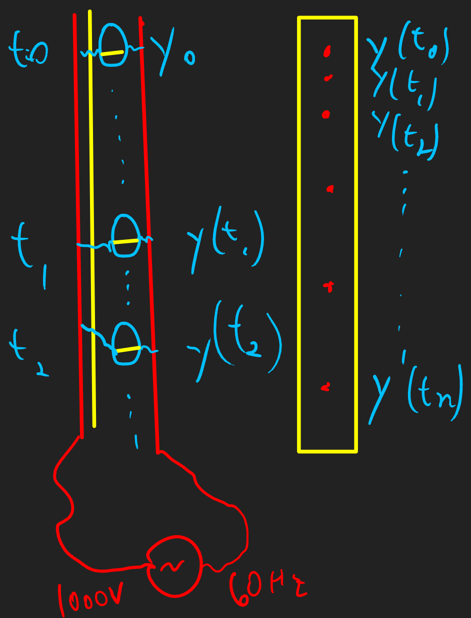
Método de Mínimos Quadrados

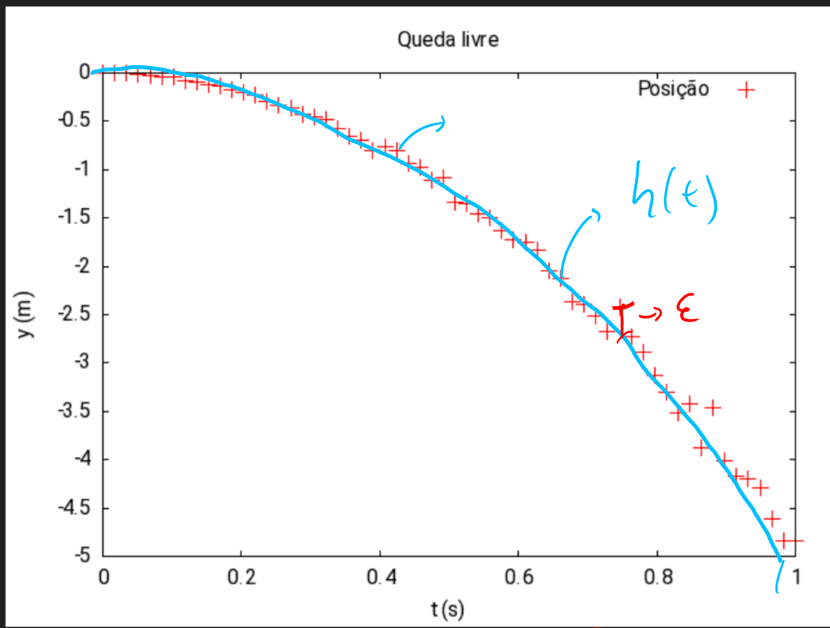
Ajuste de curvas/funções a dados experimentais

$$\rightarrow y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

(gravimetria)

y_0, v_0, g: incógnitas





$\varepsilon(t) = y(t) - h(t)$ ← minimizar $\varepsilon^2(t)$

$$\frac{d}{dt}\varepsilon^2 = 0$$

Minimizar $(\varepsilon(t))^2$

$$h(t) = y_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

$$h(t) = y_0 f_1 + v_0 f_2 - \frac{g}{2} f_3$$

combinação linear de $f_1 = 1$, $f_2 = t$, $f_3 = t^2$

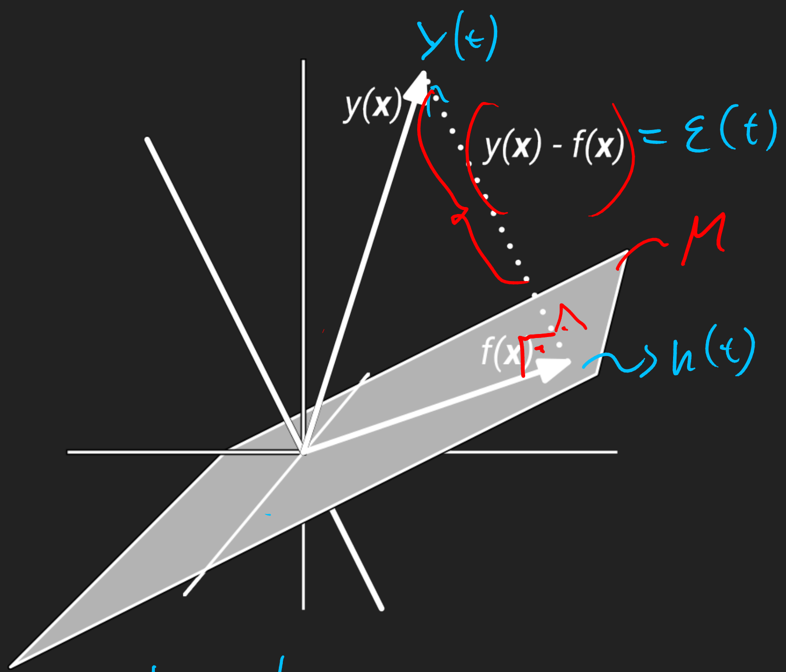
$M = \{1, t, t^2\}$ gera subespaço do esp. das funções

(modelo)

$y(t)$ é uma função.

$h(t)$ será o vetor do subespaço M MAIS PRÓXIMO de y(t)

é a PROJEÇÃO de y(t) sobre o subespaço M



$$h(t) = \text{proj}_M\, y(t)$$

$$\langle \underbrace{y(t)-h(t)}_{\varepsilon(t)},\ h(t)\rangle = 0$$

$$\langle y(t)-\left(y_0+v_0 t-\frac{g}{2}t^2\right),\ y_0+v_0 t-\frac{g}{2}t^2\rangle = 0$$

Uma vez que y(t) - h(t)
deve ser ortogonal ao subespaço M
Então deve ser ortogonal
A CADA vetor gerador de M
resultando no sistema linear:

$$\begin{cases} \langle y(t)-\left(y_0+v_0 t-\frac{g}{2}t^2\right),\ 1\rangle = 0 \\ \langle y(t)-\left(y_0+v_0 t-\frac{g}{2}t^2\right),\ t\rangle = 0 \\ \langle y(t)-\left(y_0+v_0 t-\frac{g}{2}t^2\right),\ t^2\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0\langle 1,1\rangle + v_0\langle t,1\rangle - \frac{g}{2}\langle t^2,1\rangle = \langle y(t),1\rangle \\ y_0\langle 1,t\rangle + v_0\langle t,t\rangle - \frac{g}{2}\langle t^2,t\rangle = \langle y(t),t\rangle \\ y_0\langle 1,t^2\rangle + v_0\langle t,t^2\rangle - \frac{g}{2}\langle t^2,t^2\rangle = \langle y(t),t^2\rangle \end{cases}$$

$$\langle f,g\rangle = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, g(t_i)$$

$y=0$

$$\begin{cases} 60\,y_0 + 30{,}41\,v_0 - 254{,}2\,\dfrac{g}{2} = 1352{,}4 \\ 30{,}41\,y_0 + 254{,}2\,v_0 - 1642{,}3\,\dfrac{g}{2} = 5432{,}5 \\ 254{,}2\,y_0 + 1642{,}3\,v_0 - 4354{,}2\,\dfrac{g}{2} = 20432{,}8 \end{cases}$$

(valores fictícios)

Resolver sist. linear

$y_0 = 0{,}07$ m
$v_0 = 0{,}025$ m/s
$g = 9{,}77$ m/s²

(9,81 ...)

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{g}{2} t^2$$

$$g = -9{,}8 \ \ldots$$

Questionário

a equação

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

$$f = y_0 g_1 + v_0 g_2 + \frac{g}{2} g_3$$

deveria ser −