

7. Efetue os seguintes passos para cada equação da questão anterior:

(a) Escreva a equação dada na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + F = 0,$$

onde Q é uma matriz quadrada simétrica, L é uma matriz de forma linear e F é uma constante escalar.

(e) Escreva a equação do item (a) nas coordenadas da base B , fazendo a transformação $F_B = FM$.

(f) Utilize a equação obtida no item anterior para escrever a equação algébrica.

(g) Analise os sinais dos autovalores da matriz Q . Trata-se de uma equação de elipsoide, hiperboloide de uma ou duas folhas ou paraboloides? Não é necessário avaliar casos degenerados.

(h) Escreva a equação do item (f) na forma canônica, considerando possíveis translações da origem.

$$e) \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + L M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + F_B = 0$$

$$e) \lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2 + \lambda_3 c^2 + Aa + Bb + Cc + F_B = 0$$

Equação algébrica

Autovalores, bem resumido (se $F_B < 0$):

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0 \Rightarrow$ elipsoide

$\lambda_1, \lambda_2 > 0; \lambda_3 < 0 \Rightarrow$ hiperboloide de uma folha

$\lambda_1 > 0, \lambda_2, \lambda_3 < 0 \Rightarrow$ hiperboloide de duas folhas

Algum $\lambda = 0$ (olhar com calma)

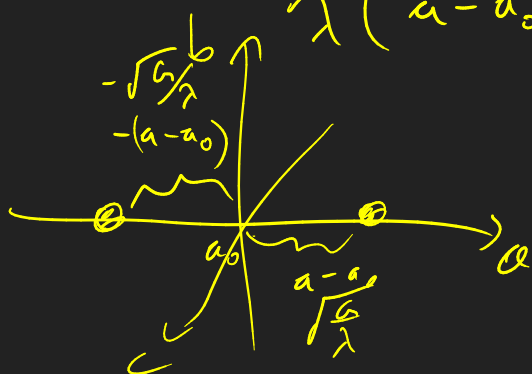
dois dos $\lambda = 0$:

$$(\lambda a^2 + Aa) + Bb + Cc + F_B = 0$$

$\hookrightarrow$ completar q.

$$\lambda (a - a_0)^2 + Bb + Cc = G$$

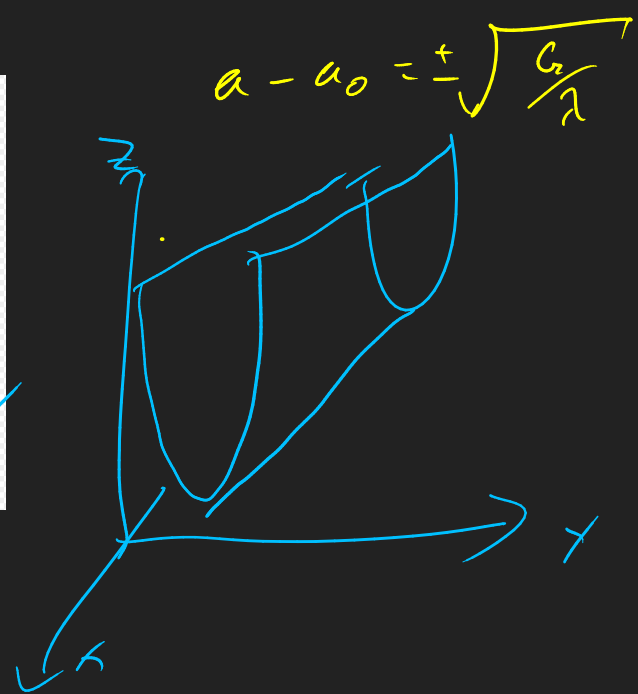
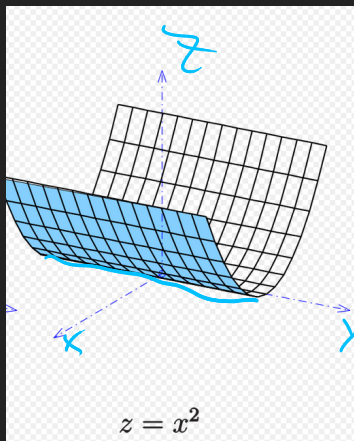
$$b = 0, c = 0$$



cilindro parabólico

$$\lambda (a - a_0)^2 = G$$

$$(a - a_0)^2 = \frac{G}{\lambda}$$



$$e) \lambda_1 \underline{a}^2 + \lambda_2 \underline{b}^2 + \lambda_3 c^2 + \underline{A} \underline{a} + \underline{B} \underline{b} + C c + F_B = 0$$

Equação algébrica

- (g) Analise os sinais dos autovalores da matriz Q . Trata-se de uma equação de elipsoide, hiperboloide de uma ou duas folhas ou paraboloides? Não é necessário avaliar casos degenerados.
- (h) Escreva a equação do item (f) na forma canônica, considerando possíveis translações da origem.

Caso hiperboloide de uma folha. $\lambda_1, \lambda_2 > 0; \lambda_3 < 0 \Rightarrow$ hiperboloide de uma folha

Completar quadrados:

$$\lambda_1 (a - a_0)^2 + \lambda_2 (b - b_0)^2 + \lambda_3 (c - c_0)^2 = G$$

Descloar a origem:

$$\underline{\bar{a}} = a - a_0$$

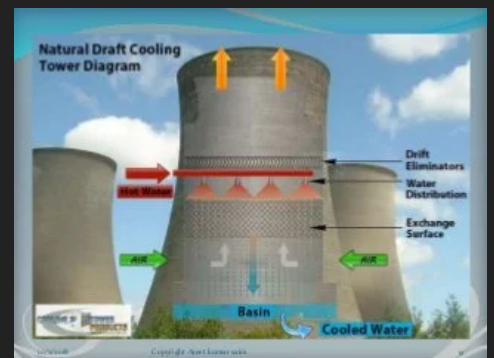
$$\underline{\bar{b}} = b - b_0$$

$$\underline{\bar{c}} = c - c_0$$

$$\lambda_1 \bar{a}^2 + \lambda_2 \bar{b}^2 + \lambda_3 \bar{c}^2 = G$$

$$\frac{\bar{a}^2}{\left(\frac{G}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{\bar{b}^2}{\left(\frac{G}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} - \frac{\bar{c}^2}{\left(\frac{G}{\sqrt{|\lambda_3|}}\right)^2} = 1$$

$\hookrightarrow$ módulo! $\lambda_3 < 0$



$$\rightarrow \frac{\bar{a}^2}{k_1^2} + \frac{\bar{b}^2}{k_2^2} - \frac{\bar{c}^2}{k_3^2} = 1 \quad \leftarrow$$

Equação canônica do hiperboloide de uma folha

$$\frac{\bar{a}^2}{k_1^2} - \frac{\bar{b}^2}{k_2^2} + \frac{\bar{c}^2}{k_3^2} = 1$$

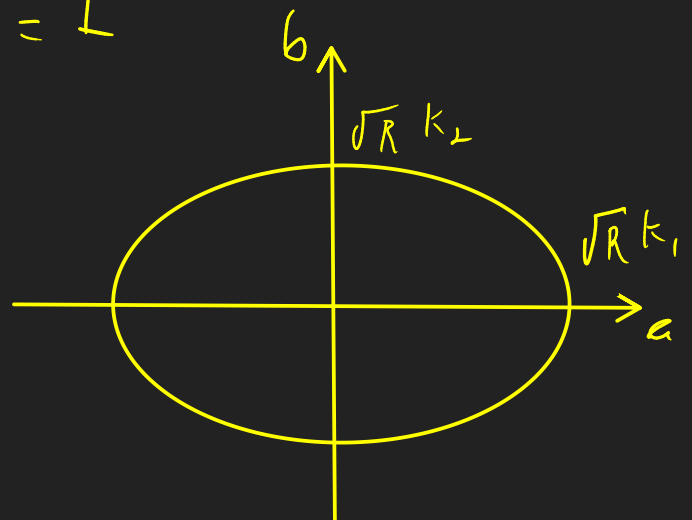


$$\frac{\bar{a}^2}{k_1^2} + \frac{\bar{b}^2}{k_2^2} - \frac{\bar{c}^2}{k_3^2} = 1$$

para valores de c constantes:

$$\frac{\bar{a}^2}{k_1^2} + \frac{\bar{b}^2}{k_2^2} = \underbrace{\left(1 + \frac{\bar{c}^2}{k_3^2}\right)}_{\hookrightarrow R}$$

$$\frac{\bar{a}^2}{R k_1^2} + \frac{\bar{b}^2}{R k_2^2} = 1$$



2. Escreva a matriz das formas bilineares simétricas que dão origem às formas quadráticas abaixo:

(a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2x_3$

(b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_2x_3$

(c) $q(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

c) $q(x_1, x_2, x_3) = 2(\underline{x_1x_2} + \underline{x_1x_3} + x_2x_3)$

$$q(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz \\ &\quad (A\underline{x^2} + B\underline{xy} + C\underline{xz} + D\underline{y^2} + E\underline{yz} + F\underline{z^2}) \\ &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

! $\rightarrow \begin{bmatrix} A & B/2 & C/2 \\ D/2 & B & E/2 \\ C/2 & E/2 & F \end{bmatrix}$

Autovalores e autovetores:

$$q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_q(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

2 autovalores: $L.I$ com mesmo autovalor.

$$\begin{cases} v_1 = (1, 0, -1) \\ v_2 = (0, 1, -1) \end{cases}$$

A multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda = -1$ é 2.

Ortogonalizar:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \text{proj}_{u_1} v_2$$

$$= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$$= (0, 1, -1) - \frac{1}{2} u_1$$

$$= (0, 1, -1) - \frac{1}{2} (1, 0, -1)$$

$$u_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \left\langle (1, 0, -1), \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) \right\rangle$$

$$u_1 \perp u_2 \quad -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 0 \quad \bar{u}_2 = (-1, 2, -1)$$

Base ortogonal:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, 2, -1), \underline{v_3} \right\} //$$

$$q(b) = 1$$

$$-a^2 - b^2 + 2c^2 = 1$$

$$-a^2 - b^2 + \frac{c^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \rightarrow$$

hiperboloide de duas folhas

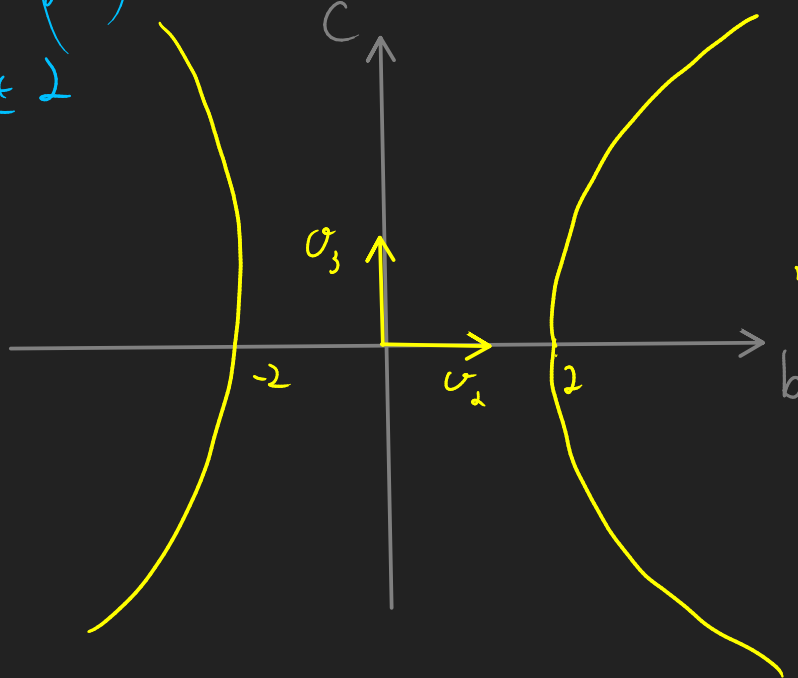
Supondo $a = 0$

$$-b^2 + \frac{c^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

hipérbole:

$$b = 0 \Rightarrow c^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$c = \pm 2$$



$$v_+ = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$$

$$v_- = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

vértices
na direção
do vetor

$$(-1, 2, -1)$$