Notas de aula ECT2202 T02 2021-12-16 Aula 14 — Álgebra de transformações

janeiro 2022

do	se	te	qu	qu	se	sá
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Aulas 15, 16 ; 17

P2

Lista 2 ad

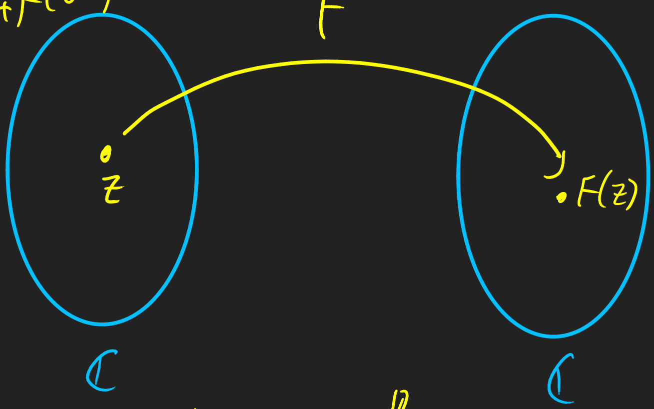
18 Treo. (2.2)

---

10. Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ e seja $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $F(z) = \bar{z}$. Mostre que F é um operador linear. Se tivéssemos considerado o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, F ainda seria um operador linear?

$F(z+w) = F(z) + F(w)$

$F(\alpha z) = \alpha F(z)$



$F(z) = \bar{z} = z^*$

$z = a + bi$

$F(a+bi) = a - bi$

$\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ sobre $\mathbb{R}$: escalares $\alpha \in \mathbb{R}$

$F(z) = \bar{z}$ $\qquad z = a + bi$

$F(a+bi) = a - bi \quad ; \alpha \in \mathbb{R}$

$F(\alpha(a+bi)) = F(\alpha a + \alpha bi)$

$= \alpha a - \alpha bi$

$= \alpha(a - bi)$

$= \alpha F(a+bi)$

$F(\alpha z) = \alpha F(z)$ ✓

F é linear

//

$\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ sobre $\mathbb{C}$, escalares $\alpha \in \mathbb{C}$

$F(z) = \bar{z}$;

$z = a + bi \quad ; \quad \alpha = x + yi \in \mathbb{C}$

$F(\alpha z) = F((x+yi)(a+bi))$

$\vdots$

$\neq (x+yi) F(a+bi)$

F não é linear

$F(\alpha z) = \overline{(\alpha z)} = \bar{\alpha}\bar{z}$ (ex)

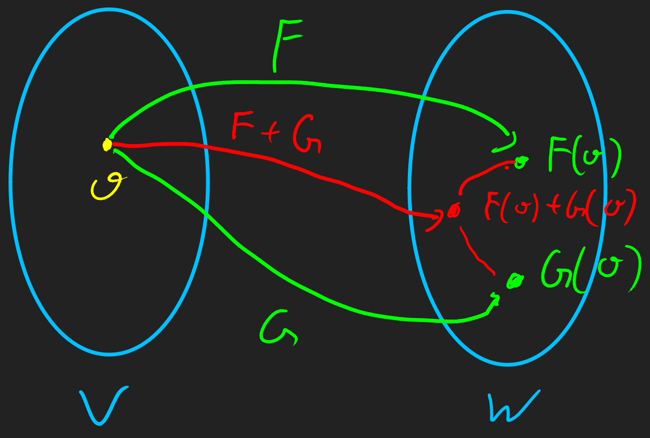
$\alpha F(z) = \alpha \bar{z} \neq \bar{\alpha}\bar{z}$

Álgebra de transformações lineares

Fixado espaços vetoriais V e W sobre o corpo $\mathbb{K}\begin{cases}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{cases}$

$F : V \to W$

$G : V \to W$



Conjunto L(V,W): todas as transformações lineares com domínio V e contradomínio W

Adição entre transformações lineares de L(V,W)

$$(F+G) : V \to W$$

adição e L(V,W)

adição em W

$$(F+G)(v) = F(v) + G(v)$$

Nos reais:

$$\begin{cases} f(t) = \cos(t) \\ g(t) = \operatorname{sen}(t) \end{cases} \to (f+g)(t) = \cos(t) + \operatorname{sen}(t)$$

$(F+G)$ é linear:

$$\begin{aligned}(F+G)(\alpha v) &= F(\alpha v) + G(\alpha v)\\ &= \alpha F(v) + \alpha G(v)\\ &= \alpha\big(F(v) + G(v)\big)\\ &= \alpha (F+G)(v)\end{aligned}$$

(F+G) é HOMOGÊNEA

(F+G) é ADITIVA (exercício)

$\Big\}$ (F+G) é LINEAR. $\Rightarrow$ O CONJUNTO L(V,W) É FECHADO POR ADIÇÃO

Multiplicação por escalar: $(\lambda F)(v) = \lambda\big(F(v)\big) \quad \lambda \in \mathbb{K}$

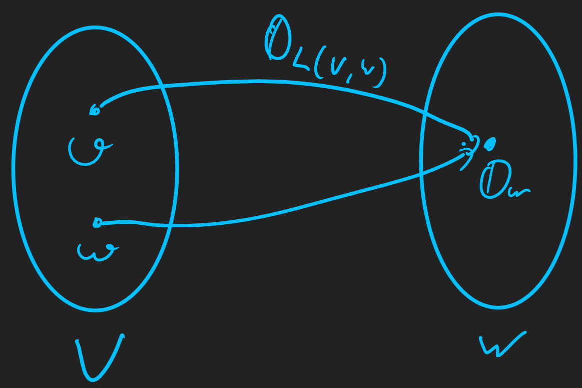
(exercício) mostrar que L(V,W) é fechado por multiplicação por escalar.

$L(V,W)$ é um espaço vetorial.

$L(V,W)$ é espaço vetorial

Vetor nulo: $0_{L(V,W)} = [F(v) = 0_W]$

$Ker(0_{L(V,W)}) = V$



$dim(L(V,W))$:

se $dim(V) = n$ $dim(W) = m$

então $dim(L(V,W)) = nm$

Note: $dim(M_{m \times n}) = nm$

isomorfos.

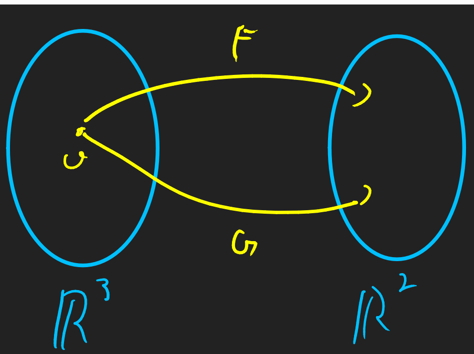
Existe uma transformação linear BIJETORA entre L(V,W) e $M_{m.n}$ Aula 15

logo $dim(L(V,W)) = dim(M_{m.n})$

1. Considere as transformações lineares $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$F(x,y,z) = (2x, y+z)$$
$$G(x,y,z) = (x-z, y)$$

a. Calcule $(F+G)(\boldsymbol{v})$, com $\boldsymbol{v} = (2,3,4)$
b. Calcule $(3F)(\boldsymbol{v})$, com $\boldsymbol{v} = (2,3,4)$
c. Calcule $(2F-5G)(\boldsymbol{u})$, com $\boldsymbol{u} = (5,1,3)$
d. Obtenha uma expressão para a transformação $F+G$
e. Obtenha uma expressão para a transformação $3F$
f. Obtenha uma expressão para a transformação $2F-5G$



a. Calcule $(F+G)(\boldsymbol{v})$, com $\boldsymbol{v} = (2,3,4)$

$$(F+G)(2,3,4) = F(2,3,4) + G(2,3,4)$$
$$= (4, 3+4) + (-2, 3)$$
$$(F+G)(2,3,4) = (2, 10) \;//$$

c. Calcule $(2F-5G)(\boldsymbol{u})$, com $\boldsymbol{u} = (5,1,3)$

$$(2F-5G)(5,1,3) = 2F(5,1,3) - 5G(5,1,3)$$
$$= 2(10, 4) - 5(2,1)$$
$$= (10, 3) \;//$$

f. Obtenha uma expressão para a transformação $2F - 5G$

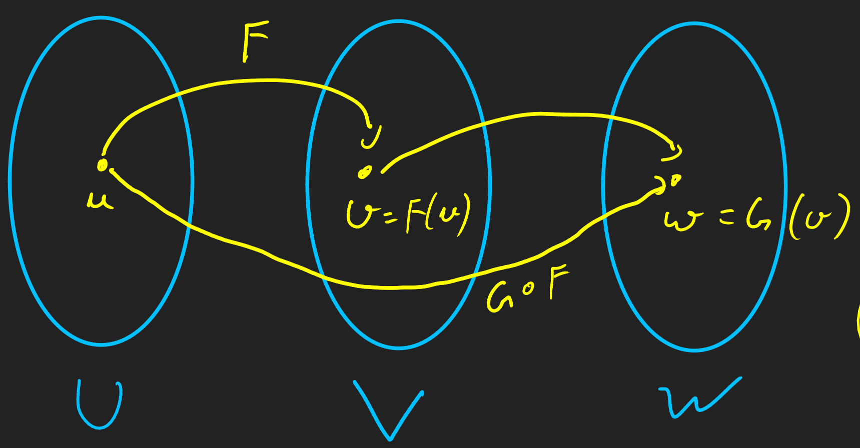
$F(x,y,z) = (2x, y+z)$
$G(x,y,z) = (x-z, y)$

$$(2F-5G)(x,y,z) = 2F(x,y,z) - 5G(x,y,z)$$
$$= 2(2x, y+z) - 5(x-z, y) \leftarrow R^2$$
$$= (-x+5z, -3y+2z)$$

f. $(2F-5G)(x,y,z) = 2F(x,y,z) - 5G(x,y,z) = (-x+5z, -3y+2z)$

//

Composição de transformações



$F: U \to V$

$G: V \to W$

$G \circ F: U \to W$

$(\underbrace{G \circ F}_{\text{g-bola-f}})(u) = G(F(u))$

transformação composta

Se $W \neq U$ $F \circ G$ não existe.

No caso de OPERADORES lineares U = V = W   F, G, H ∈ L(V)   L(V) = L(V,V)

- $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$ Associativa.
- $F \circ (G + H) = (F \circ G) + (F \circ H)$ } distributiva
- $(F + G) \circ H = (F \circ H) + (G \circ H)$

Em geral $F \circ G \neq G \circ F$ não comutativa.

- Existe I tal que $I \circ F = F \circ I = F$

$I(v) = v$

$L(V), +, \lambda, \circ$ GRUPO.

Grupo das Matrizes

$F \circ G \longleftrightarrow AB$

2. Considere as transformações F e G do Exercício 1 e a transformação $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$H(x, y) = (y, x)$$

$$F(x, y, z) = (2x, y + z)$$
$$G(x, y, z) = (x - z, y)$$

a. Calcule $(H \circ F)(\boldsymbol{v})$, com $\boldsymbol{v} = (2, 3, 4)$
b. Calcule $(H \circ G)(\boldsymbol{v})$, com $\boldsymbol{v} = (2, 3, 4)$
c. Obtenha uma expressão para a transformação $H \circ F$
d. Obtenha uma expressão para a transformação $H \circ G$
e. Obtenha uma expressão para a transformação $H + F$ $(v) = H(\vec{v}) + F(\vec{v})$ $\times$
f. Obtenha uma expressão para a transformação $F \circ H$

$\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$

a) $(H \circ F)(2,3,4) = H(F(2,3,4))$
$= H(4, 7)$
$= (7, 4)$

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

c) Expressão para $H \circ F$:

$(H \circ F)(x, y, z) = H(F(x, y, z)) = H(2x, y+z)$
$= (y+z, 2x)$ //

e) Expressão para $H + F$

$H \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$
$F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

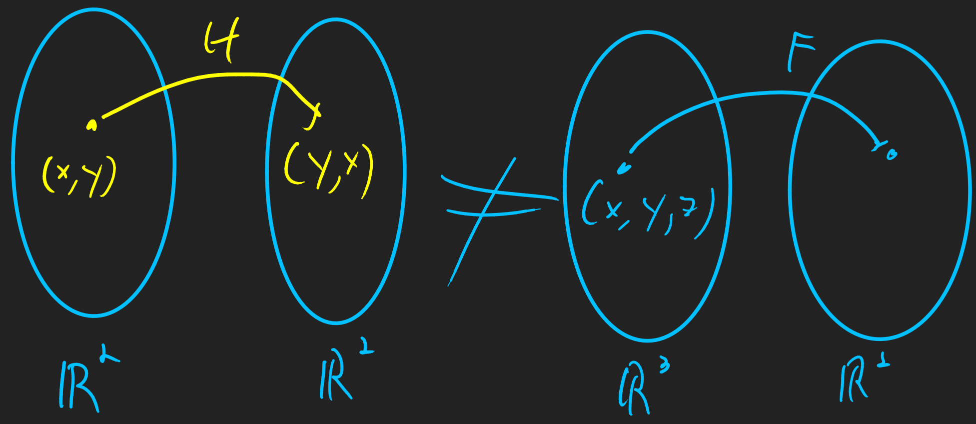
H e F pertencem a espaços vetoriais DISTINTOS, logo não há adição definida entre eles

f) $F \circ H = F(H(v))$

$H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$F(x, y, z)$

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$



$D(F) \not\supset Im(H)$ logo $F \circ H$. não está definida.

$F, G \in L(P_2(\mathbb{R}))$

$F(a+bt+ct^2) = b + 2ct$

$G(a+bt+ct^2) = at + \frac{b}{2}t^2$

$(F \circ G)(2+3t-t^2) = F(G(2+3t-t^2))$

$= F\left(2t + \frac{3}{2}t^2\right)$

$= 2 + 2\frac{3}{2}t = 2 + 3t$ //

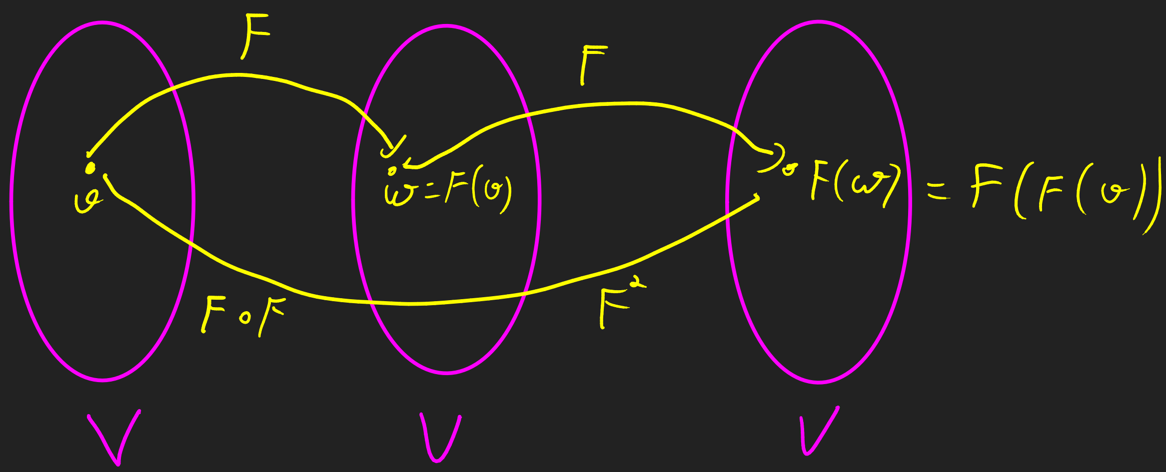
$(G \circ F)(2+3t-t^2) = G(F(2+3t-t^2))$

$= G(3 - 2t)$

$= 3t - \frac{2}{2}t = 3 - t$

Potências de operadores

$$F \in L(V)$$



$$F^2 = F \circ F$$
$$F^3 = F \circ F \circ F = F \circ F^2$$
$$F^4 = (F \circ F) \circ (F \circ F) = F^2 \circ F^2$$
$$= F \circ (F \circ F \circ F) = F \circ F^3$$
$$F^1 = F = F \circ \mathbb{I} = F \circ F^0$$
$$F^0 = \mathbb{I}$$

Se F for bijetora, existe a inversa:

$$F^{-1}(w) = v$$
$$\Updownarrow$$
$$F(v) = w$$

$$F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = \mathbb{I}$$
$$F^1 \circ F^{-1} = F^0$$

15. Seja $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ base canônica do $\mathbb{R}^3$. Se $F \in L(\mathbb{R}^3)$ é o operador tal que

$$F(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_2$$
$$F(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_3$$
$$F(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1,$$

(a) determine $F(x, y, z)$

(b) e mostre que $F^3 = \mathbb{I}$ e, portanto, $F^2 = F^{-1}$. [Nota 3]

(c) Obtenha uma expressão para F^{100}.

$$F(x,y,z) = F(x e_1 + y e_2 + z e_3)$$
$$= x F(e_1) + y F(e_2) + z F(e_3)$$
$$= x e_2 + y e_3 + z e_1$$

$$F(x,y,z) = (z,x,y)$$

$$F^3(x,y,z) = F(F(F(x,y,z)))$$
$$= F(F(z,x,y))$$
$$= F(y,z,x)$$

$$F^3(x,y,z) = (x,y,z)$$

$$F^3 = \mathbb{I}$$

$$F^3 = \underbrace{F^2 \circ F = \mathbb{I}}$$

por definição

$$\underbrace{F^{-1} \circ F = \mathbb{I}}$$

$$F^2 = F^{-1}$$ //

(c) Obtenha uma expressão para F^{100}.

$$F^{100} = F^{99} \circ F = (F^3)^{33} \circ F = \mathbb{I} \circ F = F$$

$$F^{100}(x,y,z) = (z,x,y)$$ //

Logo F é transformação

IDEMPOTENTE

Existe $n > 1$ tal que

$$F^n = F$$

Nilpotente:
Existe $n > 0$ tal que

$$F^n = 0$$

Exemplo: $D : P_n \to P_n$. $D(p) = \frac{dp}{dt}$

$$D^{n-1} = 0$$