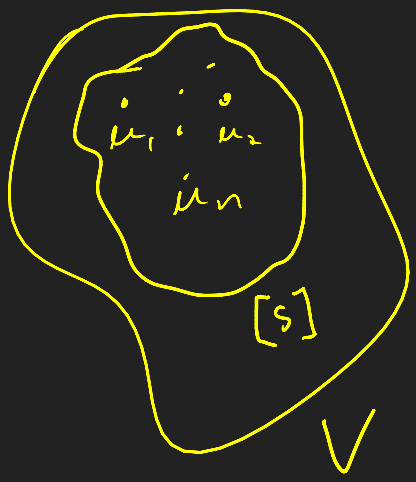
Notas de aula ECT2202 T03 2021-11-04 Aula 04 — Dependência Linear

Revisão: Espaços gerados (Aula 03)



$$S = \{ u_1, \ldots, u_n \}$$

$$[S] = span(S) = ger(S)$$

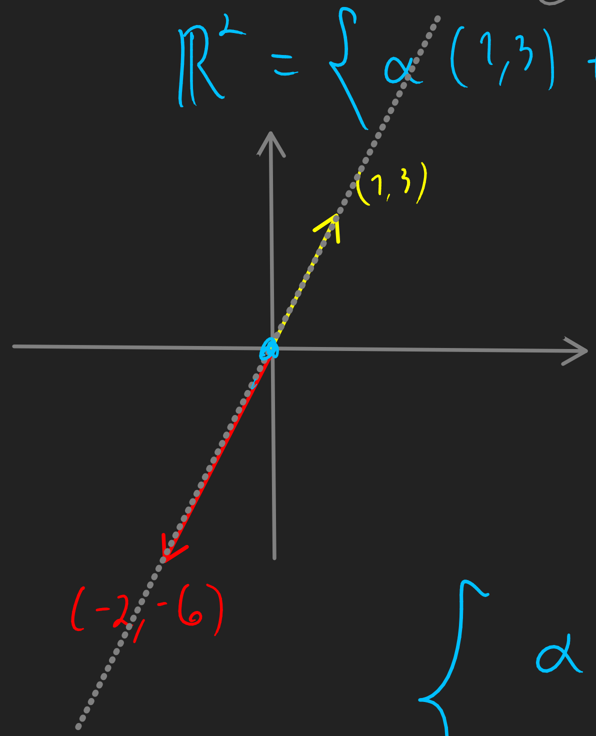
$$[S] = \{ v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \}$$

Espaço gerado por S

Exemplos: $\mathbb{R}^2$

Verifique se o conjunto S = { (1, 3), (-2, -6) } gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \{ \alpha(1,3) + \beta(-2,-6) \}$$



$$(x, y) = \alpha(1,3) + \beta(-2,-6)$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = x \\ 3\alpha - 6\beta = y \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = x \\ (3\alpha - 3\alpha) + (-6\beta + 6\beta) = y - 3x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha - 2\beta = x \\ 0 + 0 = y - 3x \end{cases}$$

$$y = 3x$$

$S = \{(1,3), (-2,-6)\}$ não gera $\mathbb{R}^2$

mas gera vetores do tipo $(x, 3x)$

$$[S] = [\{(1,3), \underbrace{(-2,-6)}_{\text{"redundante"}}\}] = [\{(1,3)\}]$$

$S = \{\underset{u}{(1,3)}, \underset{v}{(-2,-6)}\}$ é Linearmente Dependente L. D.

$$v = \lambda u \quad \boxed{v = -2u}$$

Nesse caso, existe redundância nos coeficientes de comb. lineares que formam [S]

Ex.: Escreva o vetor (3, 9) como combinação linear dos vetores de S

$$(3,9) = \alpha(1,3) + \beta(-2,-6)$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 3 \\ 3\alpha - 6\beta = 9 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \quad \begin{cases} \alpha - 2\beta = 3 \\ 0 + 0 = 9 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha - 2\beta = 3 \Rightarrow \alpha = 3 + 2\beta$$

β: var. livre.

$$(3,9) = (3+2)(1,3) + (-2,-6) = (5,15) + (-2,-6) = (3,9) \checkmark$$

$$(3,9) = 3(1,3) + 0(-2,-6)$$

Escrava o vetor (1,1) como combinação linear dos vetores de S

$(1,1) = \alpha\,(1,3) + \beta\,(-2,-6)$

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 1 \\ 3\alpha - 6\beta = 1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 1 \\ 0 - 0 = 1 - 3 = -2 \Rightarrow 0 = -2 \end{cases}$$

não tem solução

Dependência Linear

$C = \{v_1, \dots, v_n\}$

$S_1 = [C]$ esp. vetorial

$0 \in S_1$

$0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Tem solução ÚNICA se e somente se C for um conjunto L. I.

No $\mathbb{R}^n$: $\quad 0 = (0, \ldots, 0) = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0 \end{cases}$$

Sistema linear homogêneo   SEMPRE TEM SOLUÇÃO (trivial)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

A solução é única SOMENTE SE o conjunto C for L.I.

EXEMPLO $\mathbb{R}^2$

Mostre que os vetores { (3, 4), (1, -3) } são L.I.

$\to (0,0) = \alpha(3,4) + \beta(1,-3)$ equação vetorial

$(0,0) = (3\alpha + \beta, 4\alpha - 3\beta)$

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha - 3\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta + 3\alpha = 0 \\ -3\beta + 4\alpha = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$

$$\begin{cases} \beta + 3\alpha = 0 \\ + 4\alpha + 9\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$ sol. única.

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha - 3\beta = 0 \end{cases}$$

possível e determinado.

2 equações e 2 incógnitas.

terá sol. única se e somente se

$$\det \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\{ \underset{u}{(3,4)}, \underset{v}{(1,-3)} \}$$

$$\alpha u + \beta v = 0$$

$$\alpha u = -\beta v \qquad \text{se } \alpha \neq 0$$

$$u = -\beta/\alpha \, v$$

$$\boxed{u = \lambda v}$$

λ existe somente se $\alpha \neq 0$

$$(3,4) = \lambda(1,-3)$$

$$\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$$

- dado S obter o esp. $[S]$ } conj. geradores
- dado V saber se S gera V
- determinar se S é L.I. → dep. linear

Ex.: esp. vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \right\} \text{ é L.I ?}$$

Consideramos matrizes como VETORES de um espaço vetorial

$$\mathbb{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pois} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{0} = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

equação vetorial

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\gamma \\ \alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

equação vetorial

eq. escalares
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{\alpha}^{\,0} + \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

é solução única.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo S é L. I.

//

Exemplo $P_2(\mathbb{R})$

$$S = \{\underbrace{1+t}_{p}, \underbrace{-2-2t}_{q}\} \text{ é L.I.?}$$

$$q = -2p \Rightarrow q - 2p = 0$$

Logo S é L.D.

//

Ex.: $C(\mathbb{R})$ espaço vetorial das funções reais contínuas

$$S_1 = \{\underbrace{\cos(t)}_{f}, \underbrace{\operatorname{sen}(t)}_{g}\} \text{ é L.I.?}$$

$0 = 0$ constante

$$f \neq \lambda g$$

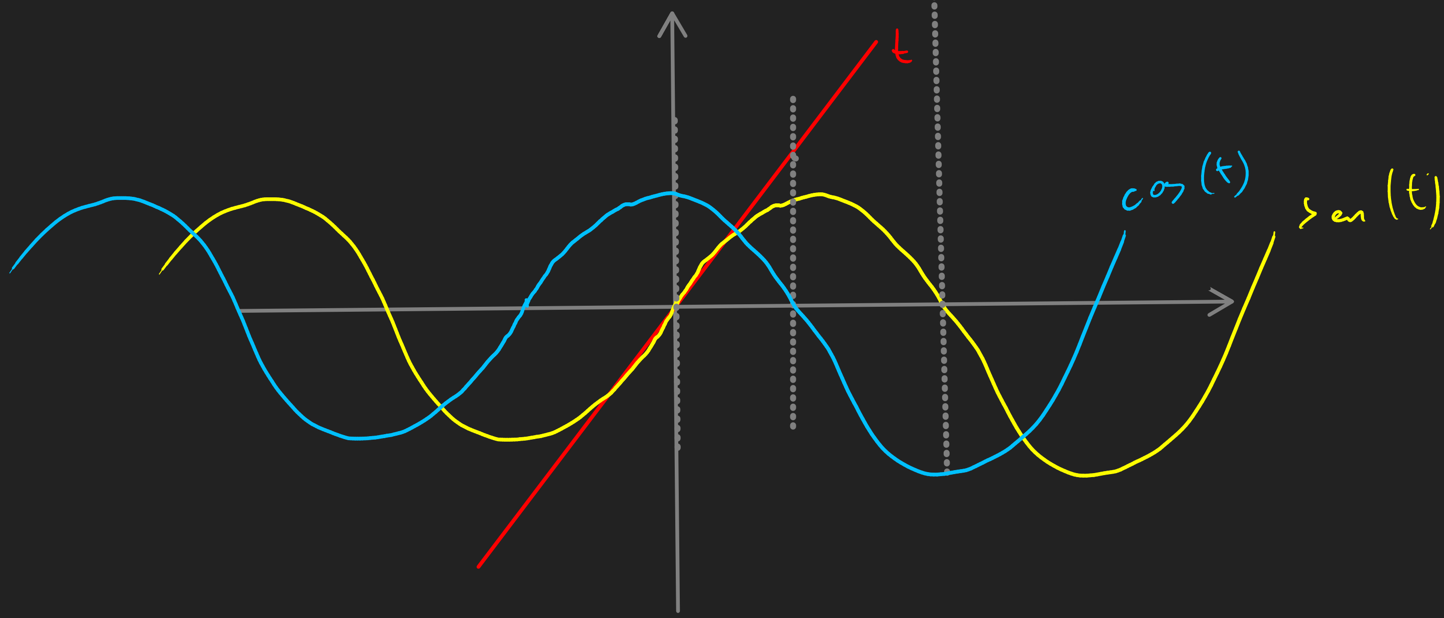
$$\cos(t) \neq \lambda \operatorname{sen}(t)$$

Logo $\{\cos(t), \operatorname{sen}(t)\}$ é L.I.

$$S_2 = \{\underbrace{t}_{f}, \underbrace{\cos(t)}_{g}, \underbrace{\operatorname{sen}(t)}_{h}\} \text{ é L.I.?}$$

$$0 = 0 = \alpha f + \beta g + \gamma h \longleftarrow$$

$$0 = \alpha t + \beta \cos(t) + \gamma \operatorname{sen}(t)$$ equação vetorial



$$0 = \alpha \underline{t} + \beta \underline{\cos(t)} + \gamma \underline{\operatorname{sen}(t)}$$ eq. vetorial

deve valer para todo t real.

3 incógnitas: α, β, γ

preciso de 3 equações

escolho. $t=0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$

$$\begin{array}{ll} t=0 & \\ t=\pi/2 & \\ t=\pi & \end{array} \begin{cases} \alpha\, 0 + \beta \cos(0) + \gamma \operatorname{sen}(0) = 0 \\ \alpha \frac{\pi}{2} + \beta \cos(\pi/2) + \gamma \operatorname{sen}(\pi/2) = 0 \\ \alpha \pi + \beta \cos(\pi) + \gamma \operatorname{sen}(\pi) = 0 \end{cases}$$

3 equações ESCALARES

$$\begin{cases} 0\alpha + \beta + 0\gamma = 0 \\ \frac{\pi}{2}\alpha + 0\beta + \gamma = 0 \\ \pi\alpha - \beta + 0\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = 0$$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \frac{\pi}{2}\alpha + \gamma = 0 \\ \pi\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \pi\alpha = 0 \end{cases}$$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ É SOLUÇÃO ÚNICA.

Logo { t, cos(t), sen(t)} é LINEARMENTE INDEPENDENTE, L.I.

EXEMPLO: polinômios:

$\{\underbrace{1}_{p}, \underbrace{t}_{q}, \underbrace{1-t^2}_{r}\}$ é L.I?

$\vec{0} = 0 = \alpha p + \beta q + \gamma r$ equação vetorial

$0 = \alpha(1) + \beta(t) + \gamma(1-t^2)$

$0 + 0t + 0t^2 = (\alpha + \gamma) + \beta t - \gamma t^2$ equação vetorial

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \checkmark$$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ solução única

Logo $\{1, t, 1-t^2\}$ é L.I.

$$\text{I} \quad 0 = (\alpha+\gamma) + \beta t - \gamma t^2$$

derivando:

$$\text{II} \quad 0 = \beta - 2\gamma t$$

derivando

$$\text{III} \quad 0 = -2\gamma$$

$$\gamma = 0 \Rightarrow \text{II} \Rightarrow \beta = 0$$

$$\text{I} = (\alpha + 0) + 0t - 0t^2 = 0$$

$$\alpha = 0.$$

$$\{u, v\}$$

$$u = \lambda v \Rightarrow L.D$$

$$\nexists \lambda \text{ t.q. } u = \lambda v \Rightarrow L.I$$

$$\{\underline{\operatorname{sen}(t)}, \underline{\cos(t)}\}$$

$$0 = \alpha \operatorname{sen}(t) + \beta \cos(t)$$ Definição

$t = 0$

$t = \pi/2$

$$\begin{cases} \alpha \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{0} + \beta \cos(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ \alpha \operatorname{sen}(\pi/2) + \beta \underbrace{\cos(\pi/2)}_{0} = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

$$[v] = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Rightarrow v = \alpha \operatorname{sen}(t) + \beta \cos(t)$$