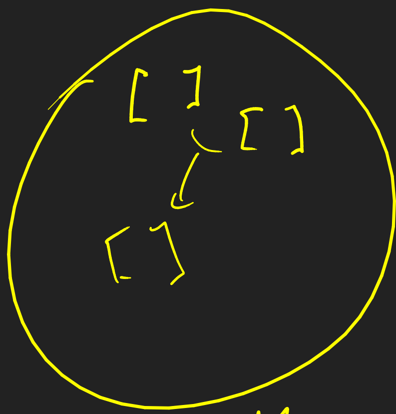
4. Mostre que o conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, das matrizes reais $m \times n$, é um espaço vetorial sobre o corpo dos $\mathbb{R}$.

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$



$M_{m\times n}$

Adição: adição usual de matrizes
Multiplicação por escalar: multiplicação usual de matriz por número real

$$\mathbb{R}^3 = \{ (x,y,z) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R} \}$$

$$\updownarrow$$

$$M_{1\times 3}(\mathbb{R}) = \{ [x \quad y \quad z] \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R} \}$$

$$M_{3\times 1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R} \right\}$$

vetor $M_{3\times1}$

$$F : \mathbb{R}^3 \to M_{1\times 3} \quad : \quad F((x,y,z)) = [x \quad y \quad z]$$

vetor $\mathbb{R}^3$

FUNÇÃO

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

TRANSPOSIÇÃO

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \}$$

$$M_{n \times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A = [a_{ij}] \in M_{m \times n} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

adição de matrizes

adição de números reais

$$B + A = [b_{ij}] + [a_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}]$$

$$= [a_{ij} + b_{ij}] = A + B$$

✓

2. Mostre, demonstrando a validade dos 11 axiomas de corpo, que o conjunto de pares ordenados de números reais $\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ é um corpo, se considerarmos as seguintes operações:

Adição $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Multiplicação $\boxed{(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)}$

3. Mostre que o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, com a adição e multiplicação usual entre números complexos, é um corpo.

$(a+bi)(c+di) \leftarrow$

$$\boxed{Re(z) + Im(z)\,i}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$ac + adi + bci + bdi^2$

$ac + (ad+bc)i + bdi^2$

$(ac - bd) + (ad+bc)i$

$z = a+bi$

$z^* = \bar{z} = a - bi$

Aula 02: Subespaços vetoriais

3. Mostre que o conjunto das matrizes $n \times n$ simétricas é um subespaço vetorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
NOTA: Uma matriz A é simétrica se for igual à sua transposta, ou seja, $A^T = A$.

$S = \{ A \in M_{n\times n} \mid A^T = A \}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{13} & a_{23} & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Propriedades das matrizes transpostas

$$\begin{cases} A^T + B^T = (A+B)^T \leftarrow \\ \alpha(A^T) = (\alpha A)^T \leftarrow \end{cases}$$

TRANSPOSIÇÃO É OPERAÇÃO LINEAR

$A^T B^T = (BA)^T$

0) $S \subset M_{n \times n}$

1) $\mathbb{0} \in S$: $A + \mathbb{0} = \begin{bmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 & \cdots \\ & & \end{bmatrix}$

$$\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

2) Fech. Adição: $\begin{cases} A \in S \Rightarrow A^T = A \\ B \in S \Rightarrow B^T = B \end{cases}$

Testar: $A+B \in S$? $\Rightarrow (A+B)^T = A+B$

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad A \in S$$
$$(A+B)^T = A + B \checkmark \quad B \in S$$

3) Fech. mult. escalar $A \in S \Rightarrow A^T = A$

$\alpha \in \mathbb{R}$

Testar. $\alpha A \in S$? $(\alpha A)^T = \alpha A$

$$(\alpha A)^T = \alpha (A^T)$$
$$= \alpha A \checkmark$$

Logo, S é subespaço vetorial de $M_{n \times n}$

Demonstração (αA)^T = α(A^T)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\alpha A^T = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{21} & \cdots & \alpha a_{n1} \\ \alpha a_{12} & \alpha a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{1n} & - & - & \alpha a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(\alpha A)^T = \left(\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{bmatrix} \right)^T$$

$$A = [a_{ij}] \qquad A^T = [a_{ji}] \Rightarrow \alpha(A^T) = [\alpha a_{ji}]$$

$$\alpha A = [\alpha \, a_{ij}] \to (\alpha A)^T = [\alpha a_{ji}]$$

Transposição é uma operação HOMOGÊNEA
(multiplicar e depois transpor = transpor e depois multiplicar)

7. Considere os vetores de $P_2(\mathbb{R})$:

$$v_1 = 1 + t \qquad v_2 = 1 - t + t^2 \qquad v_3 = 1 - t^2.$$

Escreva as seguintes combinações lineares:

(b) $2v_1 - v_2 + v_3$

$$2v_1 - v_2 + v_3 = 2(1+t) - (1-t+t^2) + (1-t^2)$$
$$= 2 + 2t - 1 + t - t^2 + 1 - t^2$$

$$2v_1 - v_2 + v_3 = 2 + 3t - 2t^2$$

Lista aula 03

4. Seja W o subconjunto de todos os vetores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de $\mathbb{R}^5$ que satisfazem

$$W = \left\{ (x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \right.$$

3 equações
5 variáveis
homogêneo

pelo menos
2 var. livres

Obtenha um conjunto finito de vetores que gera W.

$$v = \left(f_1(\ldots, x_4, x_5),\ f_2(\ldots, x_4, x_5),\ f_3(\ldots, x_4, x_5),\ x_4, x_5 \right)$$

$$= \ldots + x_4 \underbrace{(\sim)}_{v_4} + x_5 \underbrace{(\sim)}_{v_5}$$

combinação linear
de k vetores (k ≥ 2)

$$W = [\ldots, v_4, v_5]$$

Combinações lineares:

Escreva o vetor $u = 2 + 3t - 2t^2$

como combinação linear dos vetores

$$v_1 = 1 + t \qquad v_2 = 1 - t + t^2 \qquad v_3 = 1 - t^2.$$

se possível

equações vetoriais

$$\rightarrow u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

$$2 + 3t - 2t^2 = \alpha(1+t) + \beta(1 - t + t^2) + \gamma(1 - t^2) =$$

seguindo a definição de adição e multiplicação

$$= \alpha + \alpha t + \beta - \beta t + \beta t^2 + \gamma - \gamma t^2$$

$$\rightarrow 2 + 3t - 2t^2 = (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha - \beta)t + (\beta - \gamma)t^2$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \alpha - \beta = 3 \\ \beta - \gamma = -2 \end{cases}$$

sistema de
equações escalares

$$\alpha = 2$$
$$\beta = -1$$
$$\gamma = 3$$

$$u = 2v_1 - v_2 + 3v_3$$

$$(\quad) = 2(\quad)$$