Notas de aula ECT2202 T03 2022-02-08 Aula 23 — Diagonalização de f. quadraticas

Formas quadráticas:

$q: V \to \mathbb{R} = f: V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear $\quad q(v) = f(v,v)$

domínio: esp. vetorial
contradomínio: escalares

simétrica

Representação matricial $\quad q(v) = [v]_B^T \, [q]_B \, [v]_B$

Ex.: $\quad q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: \quad q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

termo cruzado

$$[T(x,y)] = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$$

matriz simétrica (numa base ortonormal)
operador auto-adjunto
diagonalizável NUMA BASE ORTONORMAL

$$q(v) = \langle v, T(v) \rangle$$

Toda forma quadrática é diagonalizável numa base ortonormal.

Existe base D em que $\quad [q]_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

Nessa base: $\quad [v]_D = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$q(v) = [v]_D^T \, [q]_D \, [v]_D$$

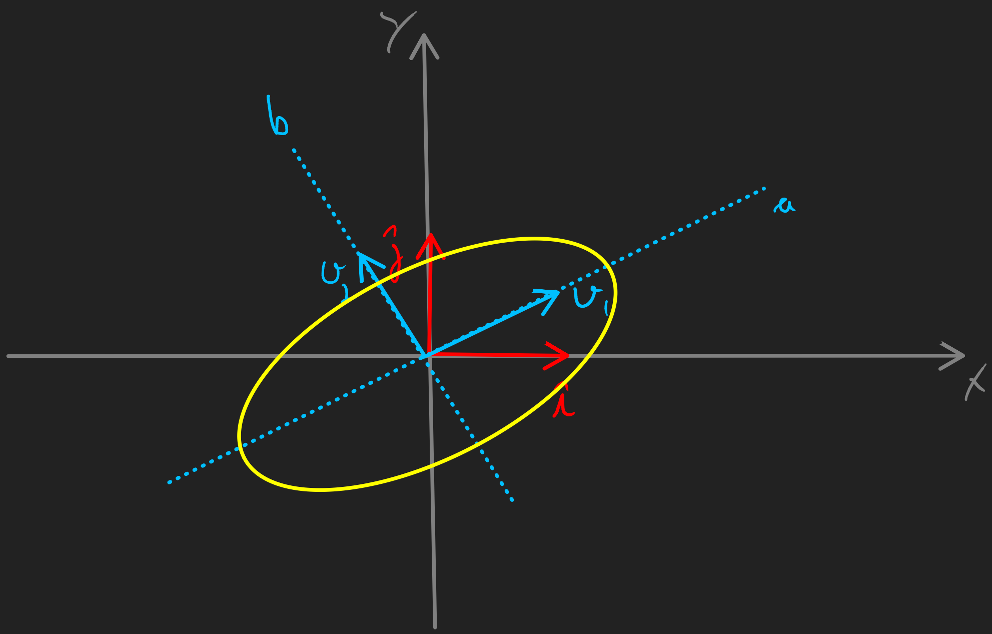
$$= \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2$$

Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$:

A curva de nível

$$q(v) = \boxed{\lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2 = 1}$$

$$\frac{a^2}{(1/\lambda_1)} + \frac{b^2}{(1/\lambda_2)} = 1$$



Pontos críticos de funções de duas variáveis.

Uma variável, série de Taylor

big O notation

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) \approx g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \frac{g''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \underbrace{O(x-x_0)^3}$$

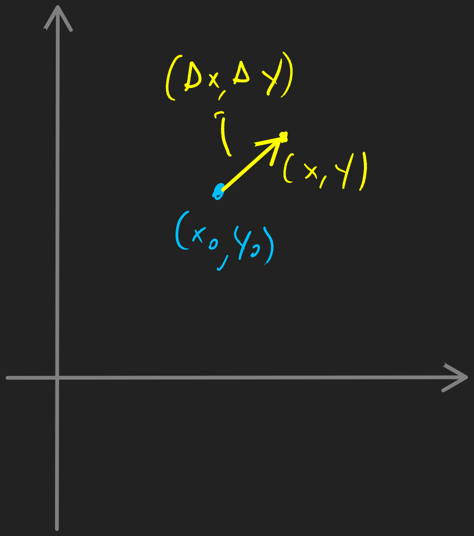
Se x_0 for ponto crítico

$$g(x) \approx \underbrace{g(x_0)}_{\text{const}} + \underbrace{\frac{g''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}_{\text{quadrático.}} \to \text{parábola com vértice em } x_0$$

No caso de duas variáveis: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\Delta x = x - x_0$
$\Delta y = y - y_0$

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \langle \vec{\nabla} f(x_0,y_0), (\Delta x, \Delta y) \rangle + \langle (\Delta x, \Delta y) \mid H(\Delta x, \Delta y) \rangle$$



$$\left\langle \vec{\nabla} f(x_0,y_0), (\Delta x, \Delta y)\right\rangle = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta y$$

$$H = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)} & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} \end{bmatrix}$$

iguais

Hessiana (simétrica)

$$4 f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \gtrless 0$$

$$\det(H)$$

Se (x_0, y_0) for ponto crítico $\vec{\nabla} f(x_0,y_0) = 0.$

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

$$= f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + \frac{2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + q(\Delta x, \Delta y)$$

com $[q] = H$

Numa base em que H é diagonal.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2$$

Se λ_1 e $\lambda_2 > 0$: mínimo $\Big\}$ $\det(H) > 0$

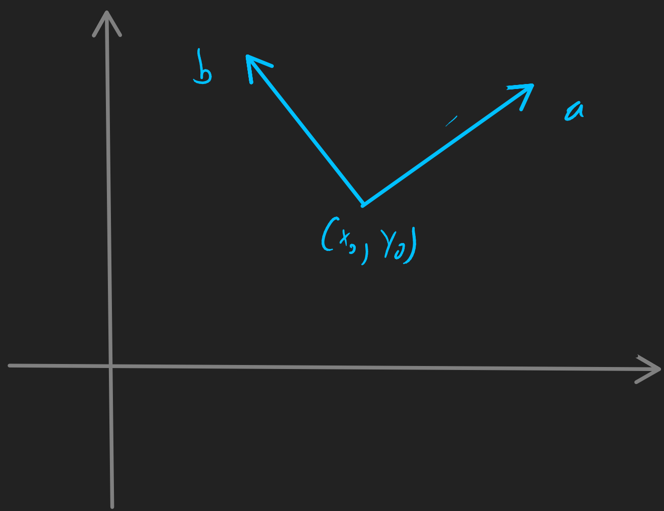
Se λ_1 e $\lambda_2 < 0$: máximo

Se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ (sinais opostos) : ponto de sela

$\det(H) < 0$

Ex.: $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \overbrace{\lambda_1 a^2}^{>0} + \overbrace{\lambda_2 b^2}^{<0}$$



Na direção a a função cresce o mais rapidamente
Na direção b a função decresce mais rapidamente

As direções de crescimento e decrescimento máximos são as direções dos autovetores de H

As curvas de nível em torno de um ponto de sela são hipérboles

Teste da segunda derivada para extremais locais de funções de duas variáveis.

Teorema.-

Seja $f: M \subset R^n \to R$, sendo $M = dom(f)$ uma função continua e cujas derivadas parciais são também continuas até de segunda ordem, dentro de uma bola aberta $D(\vec{r}_0, \delta)$ (centrada em $\vec{r}_0 = (x_o, y_0)$ e raio δ) . Considere que $\vec{r}_0$ é um ponto crítico tal que $\nabla f(x_o, y_0) = (0,0)$, logo em (x_o, y_0), temos:

i) Se $f_{xx} > 0$ e $\Delta > 0$, então (x_o, y_0) é um ponto de mínimo local de f.
ii) Se $f_{xx} < 0$ e $\Delta > 0$, então (x_o, y_0) é um ponto de máximo local de f.
iii) Se $\Delta < 0$, então (x_o, y_0) é um ponto de sela de f.
iv) Se $\Delta = 0$, então o critério falha; neste caso precisamos aplicar as definições de extremo local para caracterizar completamente o ponto crítico.

Onde $\Delta = det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$

$$\det \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = f_{aa}$

$\lambda_2 = f_{bb}$

$\Delta > 0$ $\det(H)$

$\Delta = f_{xx} f_{xy} - f_{xy}^2$

Exemplo: diagonalização de forma quadrática

Obtenha uma base em que a forma quadrática abaixo seja escrita como uma soma de quadrados

$$q(x,y) = x^2 - 10xy + y^2$$

$$q(a,b) = \pm a^2 \pm b^2$$

Matriz simétrica:

$$q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

$$[q] = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \qquad q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$[q] = \begin{bmatrix} 1 & -10/2 \\ -10/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores e autovetores da matriz [q]

$$p_q(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -5 \\ -5 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 25 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 25 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = -24 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 6 \qquad \lambda_2 = -4$$

Autovetores com $\lambda_1 = 6$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y = 6x \\ -5x + y = 6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x - 5y = 0 \\ -5x - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y, \quad y = -x$$

$$v_1 = (x,-x) = x(1,-1)$$

[q] é matriz simétrica e terá base ORTONORMAL que a diagonaliza

escolho o autovetor com norma 1 para a base.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$ //

Autovetores com $\lambda_2 = -4$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

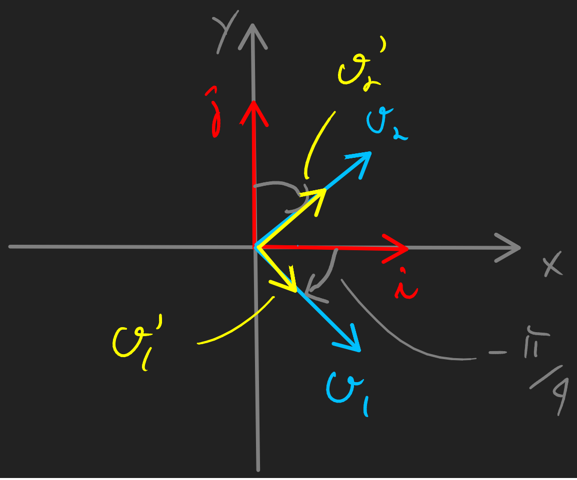
$$\begin{cases} x - 5y = -4x \\ -5x + y = -4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 5y = 0 \\ 5x - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

$$v_2 = x(1,1)$$

escolho $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

Na base $B = \left\{ v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1),\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \right\}$

$$[q]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$



$$q(v) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 6a^2 - 4b^2 \leftarrow$$

diagonalizado

(mas não é soma de quadrados)

$$= \frac{a^2}{1/6} + \frac{b^2}{1/4} = \left(\frac{a}{(1/\sqrt{6})}\right)^2 + \left(\frac{b}{(1/\sqrt{4})}\right)^2$$

escolher base B' em que as coordenadas sejam

$$[v]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow [v]_{B'} = \begin{bmatrix} \sqrt{6}\, a \\ \sqrt{4}\, b \end{bmatrix}$$

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \right\} \leftarrow$$

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{4}}(1,1) \right\} : \leftarrow$$

na base B':

$$q(v) = q(r,s) = r^2 - s^2 \quad \text{com } [v]_{B'} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}.$$

Verificando:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \right\}$$

$$[I]^B_C = \begin{bmatrix} [v_1]_C & [v_2]_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^{-\pi}/4 & -\operatorname{sen}^{-\pi}/4 \\ \operatorname{sen}\frac{-\pi}{4} & \cos^{-\pi}/4 \end{bmatrix}$$

$$P = [I]^B_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz ortogonal

$$[I]^C_B = P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

se $[v]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow [v]_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a+b)}$$

$$q(x,y) = x^2 - 10xy + y^2$$

$$= \frac{1}{2}(a+b)^2 - 10\,\frac{1}{2}(a+b)(-a+b) + \frac{1}{2}(-a+b)^2$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + \cancel{2ab} + b^2) - 5(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a^2 - \cancel{2ab} + b^2)$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - 5b^2 + 5a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

$$= a^2 + 5a^2 + b^2 - 5b^2 = 6a^2 - 4b^2 \quad \blacksquare$$

$$q(a,b) = 6a^2 - 4b^2 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ b = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{cases}$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2}(x-y)^2 - \frac{4}{2}(x+y)^2$$

$$\vdots$$

$$= x^2 - 10xy + y^2$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

$$\lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2 + \lambda_3 c^2 = 1$$

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \qquad \lambda_3 < 0$$