(c) $q(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

3. Para cada forma quadrática da questão anterior, execute os seguintes passos:
   (a) Obtenha os autovalores e respectivos autovetores da matriz da forma quadrática.
   (b) Escreva a matriz diagonal, formada pelos autovalores.
   (c) Verifique que os autovetores são ortogonais (considerando o produto interno usual)
   (d) Normalize os autovetores e escreva a base ortonormal B de autovetores em que a forma quadrática é diagonal.
   (e) Escreva a matriz mudança de base $[I]^B_C$, da base diagonal para a base canônica.
   (f) Verifique que $[I]^B_C$ é uma matriz ortogonal ($A^{-1} = A^T$).

c) $q(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Autovalores e autovetores de [q]

$$p_q(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 1) - (-\lambda - 1) + (1 + \lambda)$$

$$= -\lambda^3 + \lambda + \lambda + 1 + 1 + \lambda$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \qquad 2 = 2(\lambda_2 \cdot \lambda_3)$$

Ansatz: $\lambda_1 \stackrel{?}{=} 2 \qquad -8 + 6 + 2 = 0 \qquad \lambda = 2$ é raiz.

$\lambda_2 \lambda_3 = 1$

Ansatz: $\lambda_2 \stackrel{?}{=} 1 = -1 + 3 + 2 \neq 0 \qquad \lambda_2 = 1$ não é raiz

$\lambda_2 = -1 \quad = -(-1) - 3 + 2 = 0 \qquad \lambda_2 = -1$ é raiz

$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 2 \Rightarrow \lambda_3 = \dfrac{2}{\lambda_1 \lambda_2}.$

como 2 e -1 são raízes:

$\dfrac{2}{2(-1)} = \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = -1$ e -1 é raiz dupla.

multiplicidade
algébrica = 2

$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$

Autovalores: 2 e -1.

$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + z = -x \\ x + z = -y \\ x + y = -z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x + y + z = 0}$$

$1x + 1y + 1z = 0$

$\langle (1,1,1), (x,y,z) \rangle = 0$

Eq. do plano

$(1,1,1)$ vetor normal

2 variáveis livres: x e y

$x = x$
$y = y$
$z = -x - y$

$v = (x, y, -x-y)$

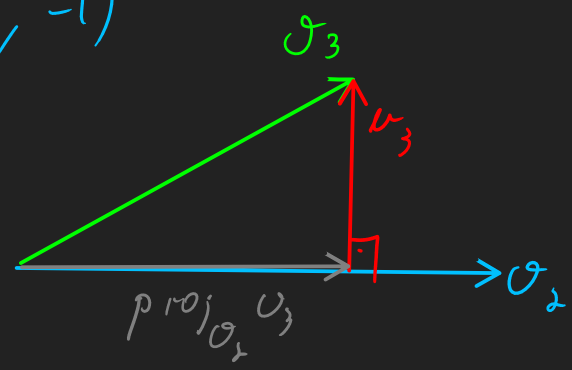
$v = x\underbrace{(1,0,-1)}_{v_2} + y\underbrace{(0,1,-1)}_{v_3}.$

dois autovetores L.I.
MULTIPLICIDADE GEOMÉTRICA DE λ=-1 É 2

$\{v_2, v_3\}$ é L.I. mas não é ortogonal

ORTOGONALIZAR

$$\vartheta_2 = (1, 0, -1)$$
$$\vartheta_3 = (0, 1, -1)$$



$$u_2 = \vartheta_2 = (1, 0, -1)$$

$$u_3 = \vartheta_3 - proj_{u_2} \vartheta_3$$

$$= \vartheta_3 - \frac{\langle u_2, \vartheta_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

$$= (0, 1, -1) - \frac{\langle (1,0,-1), (0,1,-1) \rangle}{2} (1, 0, -1)$$

$$= (0, 1, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, -1) = (-1/2, 1, -1/2) = u_3$$

$$(-1, 2, -1) = 2u_3$$

$$B = \left\{ \vartheta_1, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1) \right\}$$ será base ortonormal.

PROFECIA: $(1,1,1)$ é autovetor de $[T]$

com autovalor 2

$$\lambda_1 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 2x \\ x + z = 2y \\ x + y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ \text{———} \\ z = \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

$$-2x + y + \frac{x+y}{2} = 0 \qquad (\times 2)$$

$$-4x + 2y + x + y = 0$$

$$-3x+3y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=\frac{x+y}{2}=\frac{2x}{2}=x \end{cases}$$

$$v_1 = (x,x,x) = x(1,1,1)$$ é autovetor associado ao autovalor 2

$$B=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)\right\}$$

é ortonormal.

$$[q]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Escreva a matriz das formas bilineares simétricas que dão origem às formas quadráticas abaixo:

   (a) $q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2x_3$

$$[q] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_\lambda = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -1/2 \\ 2 & -1/2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B\lambda & \sim & \sim \\ 0 & \sim & \sim \\ 0 & \sim & \sim \end{bmatrix} = (A+B\lambda)(\lambda^2 + \cdots)$$

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - \frac{1}{4}\right] + \left((\lambda-1)+1\right) + 2\left(\frac{1}{2} - 2(1-\lambda)\right)$$

$$= (1-\lambda)^3 - \frac{1}{4}(1-\lambda) - (1-\lambda) + 1 + 1 - 4(1-\lambda)\ ]$$

Pra é cálculo.

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda - 1 + \lambda + 1 + 1 - 4 - 4\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + A\lambda + B$$