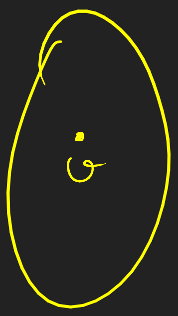
Notas de aula ECT2202 T03 2022-01-18 Aula 18 — Operadores auto-adjuntos

Matriz mudança de base vs. matriz da transformação



V

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V

$C = \{u_1, \dots u_n\}$ base de V

mesmo vetor $\begin{cases} v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \\ v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n \end{cases}$

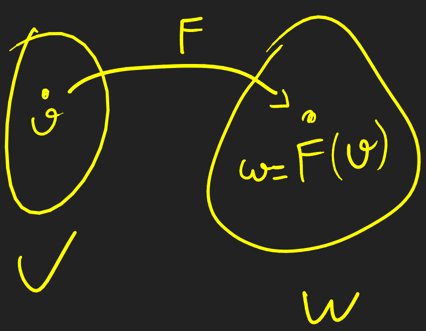
$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad [v]_C = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Matriz mudança de base $[I]^B_C$ tal que $[v]_C = [I]^B_C [v]_B$

Matriz da transformação identidade nas bases B e C

$[I]^C_B$ tal que $[v]_B = [I]^C_B [v]_C$

$I(v) = v$ transformação linear: Identidade



$F: V \to W$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$C = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W $\leftarrow$

$F(v) = w$

$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$F(v) = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad [F(v)]_C = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

m linhas   m x n   n linhas

Matriz da transformação: $[F]^B_C$ tal que $[F(v)]_C = [F]^B_C \, [v]_B$

vetores distintos

$F : V \to W$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$C = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W

$$[F]^B_C = \left[[F(v_1)]_C \, , \dots , [F(v_n)]_C \right]$$

$$F(v_1) = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n$$

3. Considere a transformação linear $G : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, que leva um polinômio de grau $\leqslant 2$ a um vetor do $\mathbb{R}^3$. A transformação é dada pela expressão

$$G(a + bt + ct^2) = (a + b, b - c, c + a).$$

Sejam $B = \{1, t, t^2\}$ a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ e $C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcule $G(1)$, $G(t)$, $G(t^2)$, ou seja, G aplicada à base B.

(b) Obtenha as coordenadas de $G(1)$, $G(t)$, $G(t^2)$, em relação à base C.

(c) Escreva a matriz $[G]_C^B$.

(d) Escreva $[v]_B$, a matriz de coordenadas de $v = 1 + t - \frac{1}{2}t^2$ em relação à base B.

(e) Calcule $[G(v)]_C = [G]_C^B [v]_B$

(f) Escreva explicitamente o vetor $G(v)$.

(g) Calcule $[G(\boxed{x + 2yt - 3zt^2})]_C$ $= [G]_C^B \left[x + 2yt - 3zt^2 \right]_B$

$$B = \{1, t, t^2\} \quad ; \quad C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

$$G(a + bt + ct^2) = (a + b, b - c, c + a).$$

a) $G(1) = (1, 0, 1)$; $G(t) = (1, 1, 0)$; $G(t^2) = (0, -1, 1)$

b) $[G(1)]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $[G(t)]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $[G(t^2)] = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $[G]_C^B = \begin{bmatrix} [G(1)]_C & [G(t)]_C & [G(t^2)] \end{bmatrix}$

$$[G]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} //$$

(d) Escreva $[v]_B$, a matriz de coordenadas de $v = 1 + t - \frac{1}{2}t^2$ em relação à base B.

$$v = 1 + t - \frac{1}{2}t^2 = \alpha_1(1) + \alpha_2(t) + \alpha_3(t^2)$$

$$v = 1 + 1t - 1/2\, t^2$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}_B //$$

→ (e) Calcule $[G(\boldsymbol{v})]_C = [G]_C^B\,[\boldsymbol{v}]_B$

(f) Escreva explicitamente o vetor $G(\boldsymbol{v})$.

(g) Calcule $\left[G\left(x + 2yt - 3zt^2\right)\right]_C$

$$[G(v)]_C = [G]_C^B \cdot [v]_B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_C^B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}_B$$

$$[G(v)]_C = \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1-(-1/2) \\ 1+(-1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}_C$$

$$[G(v)]_C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

f) $G(v) = 2(1,0,0) + \frac{3}{2}(0,1,0) + \frac{1}{2}(0,0,1)$

$G(v) = \left(2, \frac{3}{2}, 1/2\right)$

Operadores autoadjuntos, hermitianos e unitários

$\hookrightarrow T: V \to V$

Bases ortonormais <== produto interno

$B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ base ortonormal de V

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$v, w \in V : \begin{cases} v = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots + v_n u_n \\ w = w_1 u_1 + \cdots + w_n u_n \end{cases}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_B \qquad [w]_B = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_i v_i u_i , \sum_j w_j u_j \right\rangle$$

$$= \sum_i v_i \left\langle u_i , \sum_j w_j u_j \right\rangle$$

$$= \sum_i v_i \underbrace{\left(\sum_j w_j \underbrace{\langle u_i , u_j \rangle}_{\hookrightarrow = 0 \text{ se } j \neq i} \right)}_{w_i}$$

$$= \sum_i v_i \, w_i$$

$$\langle v, w \rangle = \sum_i v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

$$\begin{cases} i \neq j \Rightarrow \langle u_i , u_j \rangle = 0 : \{u_i\} \text{ é base ortogonal} \\ i = j \Rightarrow \langle u_i , u_j \rangle = 1 : \text{base normalizada} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ ao mesmo tempo: BASE ORTONORMAL

$$[v]_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_B \qquad [w]_B = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = \sum_i v_i w_i$$

$$= [v_1 \ \dots \ v_n] \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\langle v, w \rangle = [v]^T [w]}$$

numa base ORTONORMAL

OPERADOR AUTOADJUNTO

$F : V \to V$ operador no espaço V

Seja B base ortonormal de V

EXISTE $[F]_B$ QUADRADA

SE [F] for SIMÉTRICA, então F é OPERADOR AUTOADJUNTO de V

Operador adjunto:

F* é o operador adjunto de F se e somente se

$$\begin{cases} \langle u, F(v) \rangle = \langle F^*(u), v \rangle \\ \langle u, F^*(v) \rangle = \langle F(u), v \rangle \end{cases}$$

F é AUTOADJUNTO se F* = F : $\langle u, F(v) \rangle = \langle F(u), v \rangle$

Na base B, ortonormal

$$\langle v, w\rangle = [v]^T [w],$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$\langle F(v), w\rangle = ([F][v])^T [w]$$
$$= [v]^T ([F]^T [w])$$
$$= \langle v, F^*(w)\rangle$$

F^* é o operador tal que $[F^*] = [F]^T$

Se $F^* = F$ então

$$[F^*] = [F]$$
$$[F]^T = [F] \rightarrow$$

Logo, F é simétrica.

Exemplo: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(x,y) = (y,x)$$

na base canônica :

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{simétrica}$$

Logo T é auto adjunto.

bra ket

$$\langle u, T(v)\rangle : \quad \langle u|T|v\rangle = \langle u|T(v)\rangle = \langle T(u)|v\rangle$$

Matriz de um operador autoadjunto numa base ortonormal

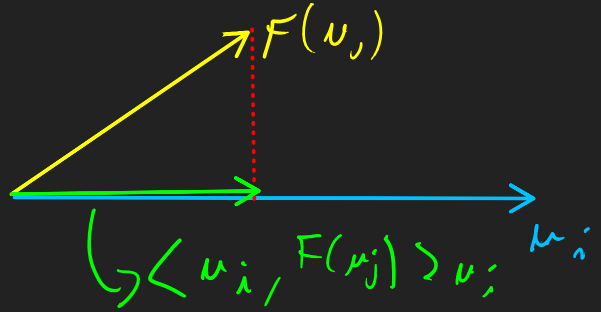
Elemento de matriz f_{ij}

$B=\{u_1,\dots,u_n\}$

$$[F]=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n}\\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & - & \cdots & f_{nn}\end{bmatrix}$$

$$f_{ij} = \langle u_i, \underbrace{F(u_j)\rangle}$$

↳ coeficiente de Fourier



$$F(u_j) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

$$\langle u_1, F(u_j)\rangle = \langle u_1, \alpha_1 u_1 \cancel{+ \cdots + \alpha_n u_n}\rangle$$

$$= \langle u_1, \alpha_1 u_1\rangle$$

$$= \alpha_1 \langle u_1, u_1\rangle = \alpha_1$$

$$[F] = \begin{bmatrix} [F(u_1)] & \cdots & [F(u_n)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \langle u_1, F(u_1)\rangle & \cdots & \langle u_1, F(u_n)\rangle \\ \langle u_2, F(u_1)\rangle & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u_n, F(u_1)\rangle & & \langle u_n, F(u_n)\rangle \end{bmatrix}$$

$\langle u_1, F(u_1)\rangle \; \langle u_1, F(u_2)\rangle$

$\langle u_2, F(u_1)\rangle \; \langle u_2, F(u_2)\rangle$

Se F é autoadjunto

$$\langle u_1, F(u_2)\rangle = \langle F(u_1), u_2\rangle$$
$$= \overline{\langle u_2, F(u_1)\rangle}$$

$\langle u_1, F(u_1)\rangle \; \langle u_1, F(u_2)\rangle$

$\langle u_2, F(u_1)\rangle \; \langle u_2, F(u_2)\rangle$

este bloco é simétrico.

Repetindo nos demais elemento, a matriz sai simétrica. (Hermitiana)

Caso complexo.

F autoadjunto <=> [F] hermitiana

$$\left(\overline{[F]}\right)^T = [F]^{+} = [F]$$

Operadores ortogonais/unitários

$F: V \to V$ Base B ortonormal.

Um operador F é ORTOGONAL se e somente se a matriz [F] for ORTOGONAL

Matriz ortogonal. $\begin{cases} A \cdot A^T = \mathbb{1} \\ A^T = A^{-1} \end{cases}$

No caso complexo: operador UNITÁRIO <=> matriz UNITÁRIA

Matriz unitária: $\begin{cases} A A^{+} = \mathbb{1} \\ A^{+} = A^{-1} \end{cases}$

Propriedades

- Se A é uma matriz ortogonal, suas colunas formam um conjunto ortonormal de vetores. O mesmo vale para as linhas

$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} — & v_1 & — \\ — & v_2 & — \\ & \vdots & \\ — & v_n & — \end{bmatrix}$

$\langle v_1, v_1 \rangle$, $\langle v_1, v_2 \rangle$

$A^T A = \begin{bmatrix} \overbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}^{1} & \overbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}^{0} & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{0} & & & \end{bmatrix}$

- Toda matriz ortogonal/unitária é inversível.

- Se A é ortogonal/unitária, $\det(A) = \pm 1$

$$\det(\underbrace{A A^{+}}_{\mathbb{1}}) = \det(A)\det(A^T)$$
$$= \det(A)\det(A)$$
$$= (\det(A))^2 = 1 = \det(\mathbb{1})$$

$(\det(A))^2 = 1$

- A matriz mudança de base $[\mathbb{I}]_C^B$, entre duas bases ~~ortogonais~~ ortonormais B e C de V, será ortogonal.

> **Nota**
>
> Nesse caso, conhecida $[\mathbb{I}]_C^B$, a mudança inversa, $[\mathbb{I}]_B^C = \left([\mathbb{I}]_C^B\right)^{-1}$, é trivial de se calcular: basta transpor a matriz original!

- Todo operador ortogonal/unitário leva uma base ortonormal de V a outra base ortonormal.

TNI

- Todo operador ortogonal é um isomorfismo, ou seja, uma transforação bijetora.

- Todo operador T ortogonal é uma *isometria* e não altera a norma dos vetores:

$$\|T(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$$