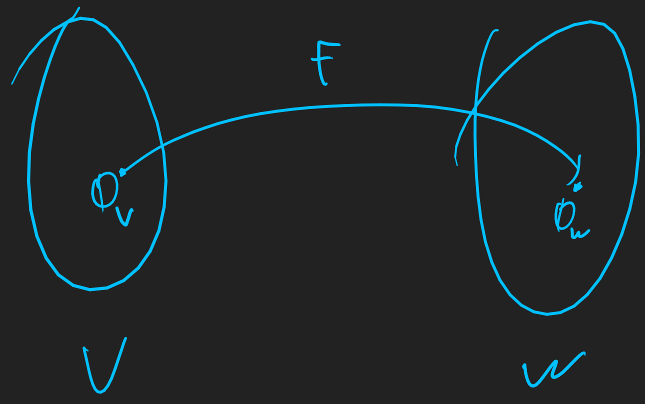
Notas de aula ECT2202 T03 2021-12-09 Aula 13 — Núcleo e Imagem

Dúvida: "a base de um núcleo de uma isomorfa é sempre o vetor nulo"

Transf. linear $\quad F: V \to W \quad \dim(V) = \dim(W)$

necessário



F é BIJETORA
- INJETORA
- SOBREJETORA

F é um ISOMORFISMO
V e W são ESPAÇOS ISOMORFOS

F injetora $\Rightarrow \dim(\ker(F)) = 0$

$\hookrightarrow \ker(F) = \{0\}$

SUBESPAÇO VETORIAL TRIVIAL DE V

Se $0 \in S \Rightarrow S$ é L.D.

$[\emptyset] = \{0\} \qquad \dim(\{0\}) = 0.$

$\hookrightarrow$ conj. vazio

Se $\dim(V) = \dim(W)$ e F é injetora $\Rightarrow$ F é bijetora.

Se F é bijetora, $\dim(V) = \dim(W)$

$$\dim(\ker(F)) + \dim(\operatorname{Im}(F)) = \dim(D(F))$$

$$0 \leq \dim(\ker(F)) \leq \dim(D(F))$$

$\hookrightarrow$ injetora

nula

sobrejetora

$$0 \leq \dim(\operatorname{Im}(F)) \leq \dim(CD(F))$$

$$\begin{cases} F \text{ é injetora:} & \dim(\ker(F)) = 0 \\ F \text{ é sobrejetora} & \dim(\operatorname{Im}(F)) = \dim(CD(F)) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} \dim(\ker(F)) & + & \dim(\operatorname{Im}(F)) & = & \dim(D(F)) \\ \downarrow \text{inj} & & \downarrow \text{sobre} & & \\ 0 & + & \dim(CD(F)) & = & \dim(D(F)) \end{array}$$

Se $\dim(V) = \dim(W)$: V e W são isomorfos.

$F: V \to W$ transf. linear bijetora = isomorfismo.

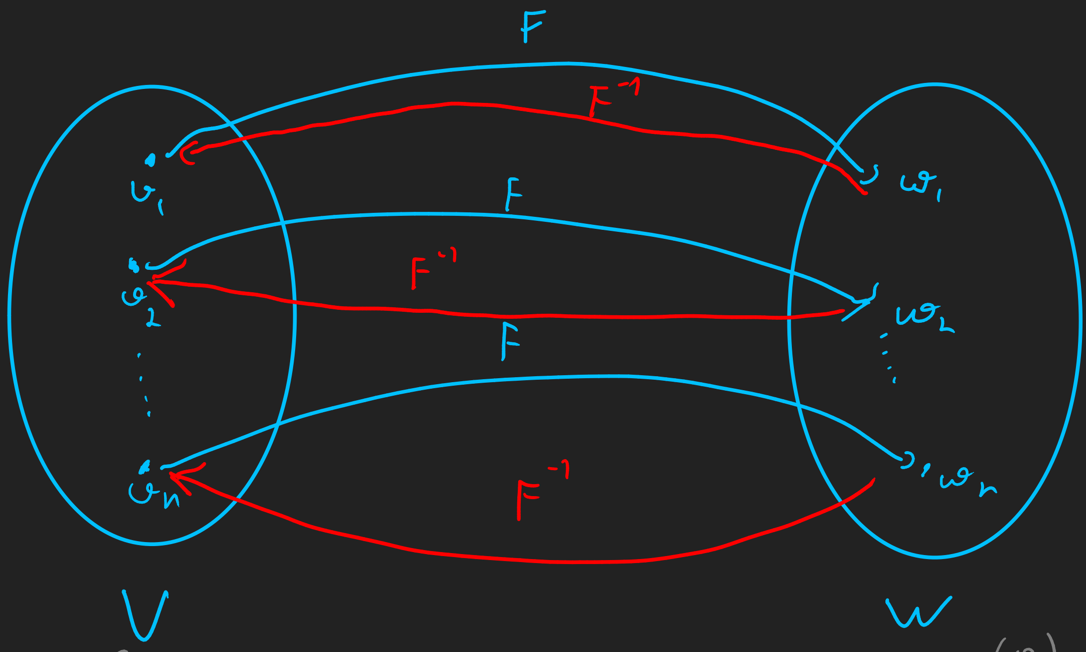
V e W são espaços isomorfos se existir transformação linear BIJETORA entre V e W

Se $\dim(V) = \dim(W) = n$, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é base de V,

$C = \{w_1, \ldots, w_n\}$ é base de W

e $F: V \to W$: $\begin{cases} F(v_1) = w_1 \\ F(v_2) = w_2 \\ \vdots \\ F(v_n) = w_n \end{cases} \Rightarrow F$ é bijetora (isomorfismo)

existe $F^{-1}: W \to V$ $\begin{cases} F^{-1}(w_1) = v_1 \\ \vdots \\ F^{-1}(w_n) = v_n \end{cases}$



$P_3(\mathbb{R})$ $\qquad$ $M_{4\times 1}(\mathbb{R})$

$$F: P_3(\mathbb{R}) \to M_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

$$F(a+bt+ct^2+dt^3) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

↳ matriz de coordenadas na base canônica

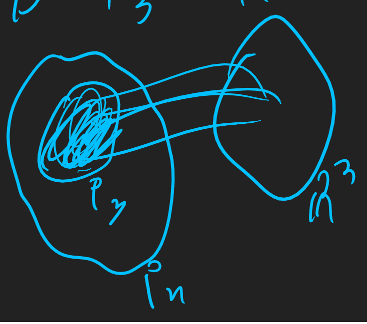
$$F^{-1}: M_{4\times 1} \to P_3$$

$$F^{-1} = \left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \right) = a+bt+ct^2+dt^3$$

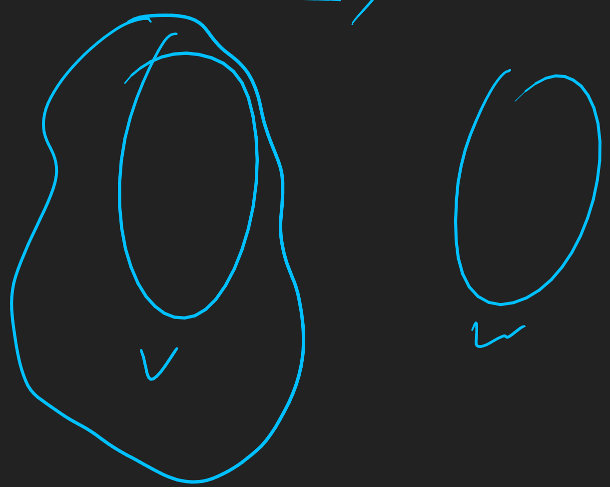
Hipótese: esp. vetorial

↓

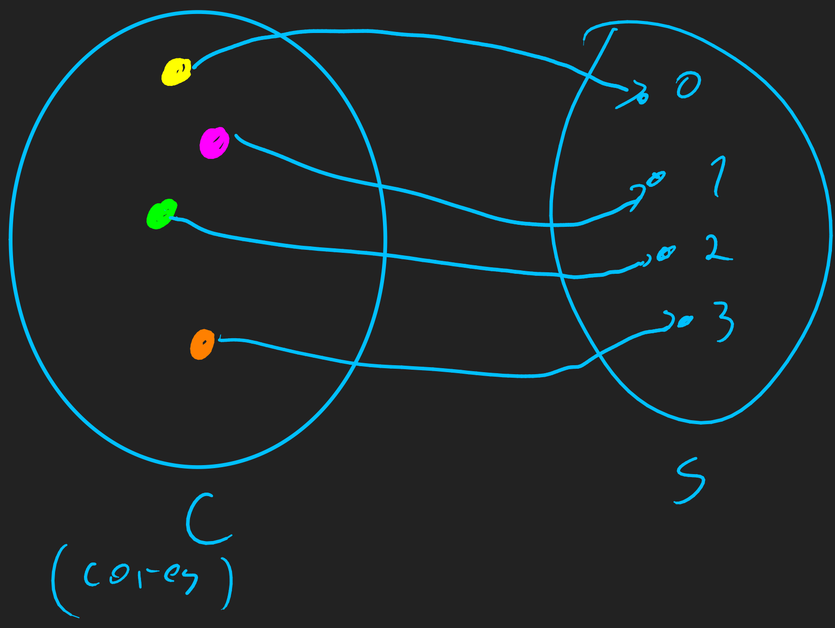
$D: P_3 \to \mathbb{R}^3$



$F: V \to W$



Transf. $\quad N : C \to S \qquad S = \{0,1,2,3\}$



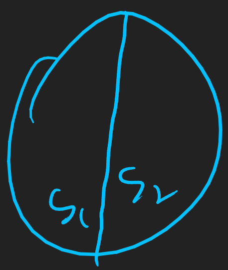
Bijetora

Não é transf. linear

$\bullet + \bullet$?

C não é esp. vetorial

$F : V \to W$



$$F(v) = \begin{cases} F_1(v) & \text{se } v \in S_1 \\ F_2(v) & \text{se } v \in S_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) \\ F(\alpha v_1) = \alpha F(v_1) \end{cases}$$

Exemplo: $F: P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$

$$F(a+bt) = (a+b) + (a-b)t$$

$0_{P_1} = p(t) = 0 + 0t$

const

a) Base e dimensão de $\ker(F)$

$$\ker(F) = \{ a+bt \mid F(a+bt) = 0 \}$$

$$F(a+bt) = 0$$
$$(a+b) + (a-b)t = 0 + 0t$$

equação vetorial

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ a-b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2a = 0 \\ 2b = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \end{matrix}$$

$\ker(F) = \{0 + 0t\} \Rightarrow \text{base}(\ker(F)) = \emptyset$

$\dim(\ker(F)) = 0$. ← F injetora

$\emptyset$ conj vazio

0 vetor nulo

$$\dim(D(F)) = \dim(CD(F))$$

sobrejetora

Teorema núcleo-imagem:

$$\dim(\ker(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(\overset{P_1(\mathbb{R})}{D(F)})$$

$$\to 0 + \dim(\mathrm{Im}(F)) = 2$$

b) $\mathrm{Im}(F) = P_1(\mathbb{R})$ pois F é sobrejetora.