Notas de aula ECT2202 T03 2021-12-07 Aulas 11-12 — Transformações Lineares

Unidade 2

Transf. 2021 L 2.1 sexta 17/12	Matrizes de transf 2022 L 2.2

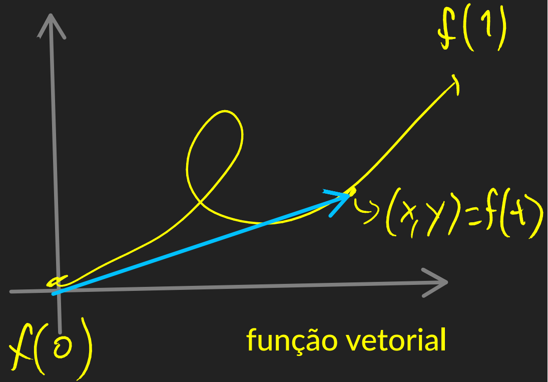
Transformações
Aplicações
Mapas

$T : V \to W$

$t = f(\underbrace{x, y, z}_{\vec{v}})$

$\vec{v} = \vec{f}(t)$

↳ curvas

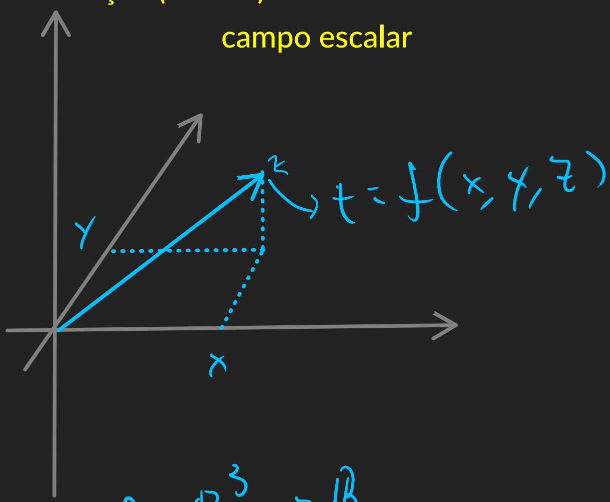


função vetorial

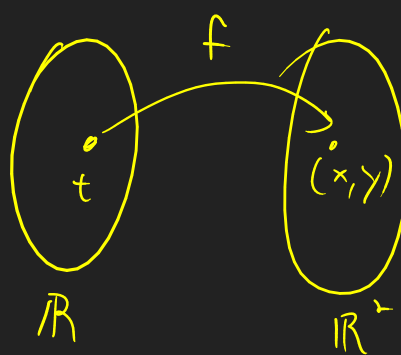
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

função (escalar) de várias variáveis

campo escalar



$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$



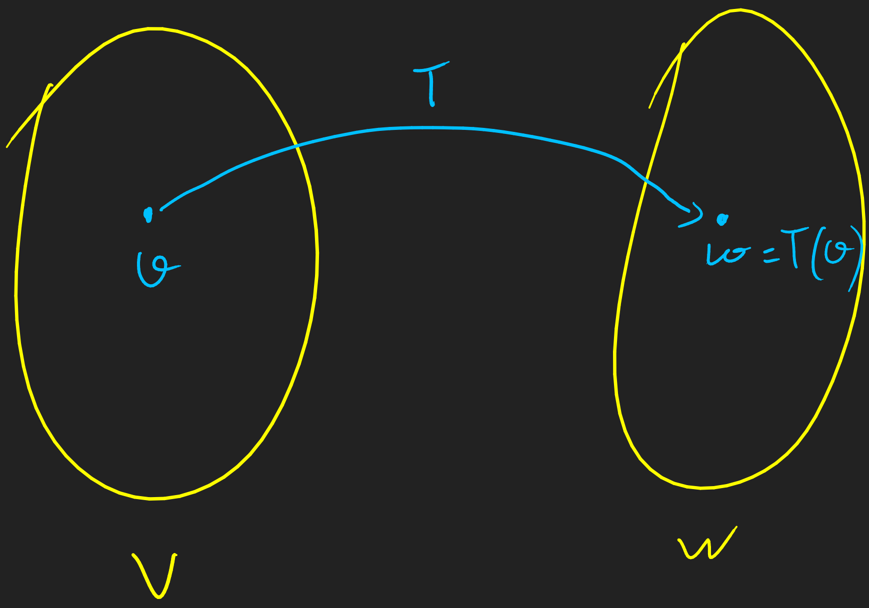
Campo vetorial

$\vec{v} = g(x, y, z)$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Transformações entre espaços vetoriais

$$T: V \to W$$

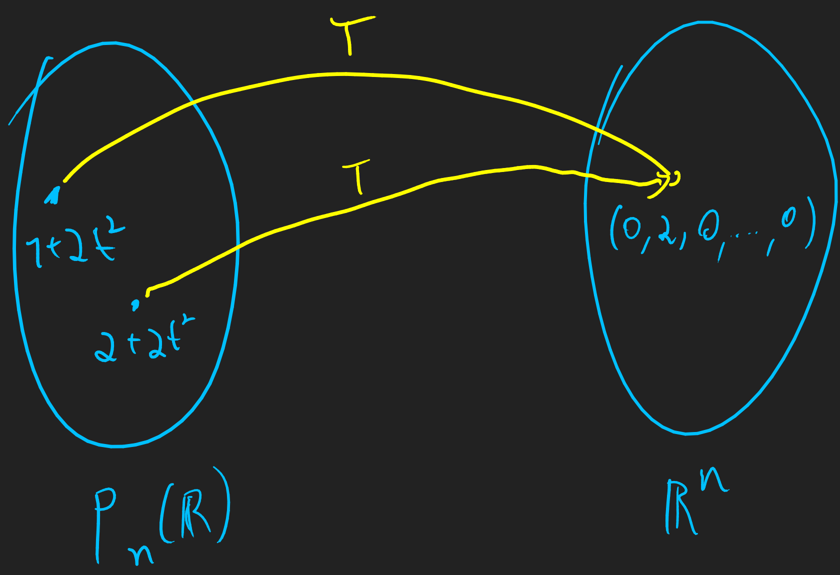


Exemplo: $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$G\underbrace{(x, y, z)}_{\mathbb{R}^3} = \underbrace{(x + 2y - 4z, 2x + 3y + z)}_{\mathbb{R}^2}$$

$$T: P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$$

$$T(\underbrace{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n}_{\text{polinômio}}) = \underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_n)}_{\mathbb{R}^n}$$



T não é injetora

Exemplo Considere g: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$G(x, y, z) = (x + 2y - 4z, 2x + 3y + z)$$

Lei expressão

Obtenha G(4, 5, -2)

$$G(4, 5, -2) = (4 + 2(5) - 4(-2), 2(4) + 3(5) + (-2))$$

$$= (22, 21)$$

Imagem do vetor (4, 5, -2) pela transf. G

$$\cancel{G(22, 21)}$$

$$f(x) = \mathrm{sen}(x)$$

$$\mathrm{sen}(\pi/2) = 1$$

$$\mathrm{sen}\,\cancel{(\pi/2) = \mathrm{sen}}(1)$$

$$p(x) = 2 + 3x - 5x^3$$

$$p(1) = 2 - 3(1) - 5(1)$$

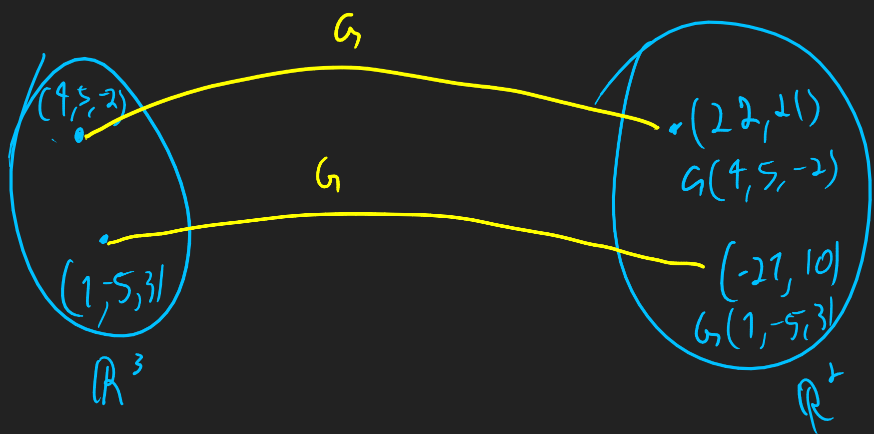
$$p(1) = 0$$

Obtenha G(1, -5, 3)

$$G(x, y, z) = (x + 2y - 4z, 2x + 3y + z)$$

$$G(1, -5, 3) = (1 + 2(-5) - 4(3), 2(1) + 3(-5) + 3)$$

$$= (-21, -10)$$



$$G(x, y, z) = (x + 2y - 4z, 2x + 3y + z)$$

Mostre que G é uma transformação linear

Aditiva: G(u+v) = G(u) + G(v) ✓

Homogênea: G(λu) = λ G(u)

PARA TODOS VETORES u, v

G : Transformação

(x, y, z) vetor de $\mathbb{R}^3$

$G((x,y,z))$

$G(x,y,z)$ vetor de $\mathbb{R}^2$

$(\sim, \sim)$

sen função

$\text{sen}(\pi/2)$ número

$u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$G(u + v) = G(u) + G(v)$

no $\mathbb{R}^3$ no $\mathbb{R}^2$

$$G(u+v) = G((x,y,z) + (a,b,c))$$

$$= G(\underbrace{(x+a, y+b, z+c)}_{\in \mathbb{R}^3})$$

$$= ((x+a) + 2(y+b) - 4(z+c), 2(x+a) + 3(y+b) + (z+c))$$

$$= (x + a + 2y + 2b - 4z - 4c, 2x + 2a + 3y + 3b + z + c)$$

$$= ((x + 2y - 4z) + (a + 2b - 4c), (2x + 3y + z) + (2a + 3b + c))$$

$$= (x + 2y + 4z, 2x + 3y + z) + (a + 2b - 4c, 2a + 3b + c)$$

$$G((x,y,z) + (a,b,c)) = G(x,y,z) + G(a,b,c)$$

$$G(x, y, z) = (x + 2y - 4z, 2x + 3y + z)$$

Logo G é transformação Aditiva

λ : letra grega λ, LÂMBDA

minúscula

Λ letra grega Λ lambda maiúscula

letra grega OMICRON
o

O- MICRON
O pequeno

letra grega OMEGA
Ω maiúsucla
ω minúscula
O-MEGA
O GRANDE

$G(x, y, z) = (x + 2y - 4z, 2x + 3y + z)$

$$G(\lambda(x,y,z)) = G(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$
$$= (\lambda x + 2\lambda y - 4\lambda z, 2\lambda x + 3\lambda y + \lambda z)$$
$$= (\lambda(x+2y-4z), \lambda(2x+3y+z))$$
$$= \lambda(x+2y-4z, 2x+3y+z)$$
$$= \lambda G(x,y,z) \quad //$$

PORTANTO G É TRANSFORMAÇÃO HOMOGÊNEA.

Como G é aditiva e Homogênea, então
G É TRANSFORMAÇÃO LINEAR.

CONTRAEXEMPLO

VERIFIQUE SE A TRANSFORMAÇÃO F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ DADA A SEGUIR É LINEAR

$$F(x,y) = (x^2, y^2)$$

Aditividade:

$$F((x,y)+(a,b)) = F(x+a, y+b)$$
$$= ((x+a)^2, (y+b)^2)$$
$$= (x^2+2ax+a^2, y^2+2yb+b^2) \quad //$$
$$F(x,y) + F(a,b) = (x^2, y^2) + (a^2+b^2) = (x^2+a^2, y^2+b^2) \neq$$

Logo, F não é aditiva portanto não é linear.

$$T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$$

$$T(p) = \frac{dp}{dt} = p' \quad \text{derivada}$$

Mostre que a transformação T é linear

$$T(p+q) = T((a+bt+ct^2)+(x+yt+zt^2))$$
$$= T((a+x)+(b+y)t+(c+z)t^2)$$
$$= \frac{d}{dt}((a+x)+(b+y)t+(c+z)t^2)$$
$$= ((b+y)+2(c+z)t)$$
$$= (b+2ct)+(y+2zt)$$
$$= \frac{d}{dt}(a+bt+ct^2) + \frac{d}{dt}(x+yt+zt^2)$$

$$T(p+q) = \frac{d}{dt}(p(t)+q(t)) = \frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dt}$$

prop. da derivada

$$= T(p) + T(q)$$

$$T(\lambda p) = \lambda T(p) \Rightarrow$$ T é transformação linear

$$G(x, y, z) = (x + 2y - 4z, 2x + 3y + z)$$

Como G é linear

$$G(x,y,z) = x\,G(1,0,0) + y\,G(0,1,0) + z\,G(0,0,1)$$

$$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$ é base do domínio de G

$$G(B) = \{G(1,0,0), G(0,1,0), G(0,0,1)\}$$

Imagem do conjunto B pela transformação G

$$\begin{cases} G(1,0,0) = (1,2) \\ G(0,1,0) = (2,3) \\ G(0,0,1) = (-4,1) \end{cases}$$

$$G(B) = \{(1,2), (2,3), (-4,1)\}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Linear

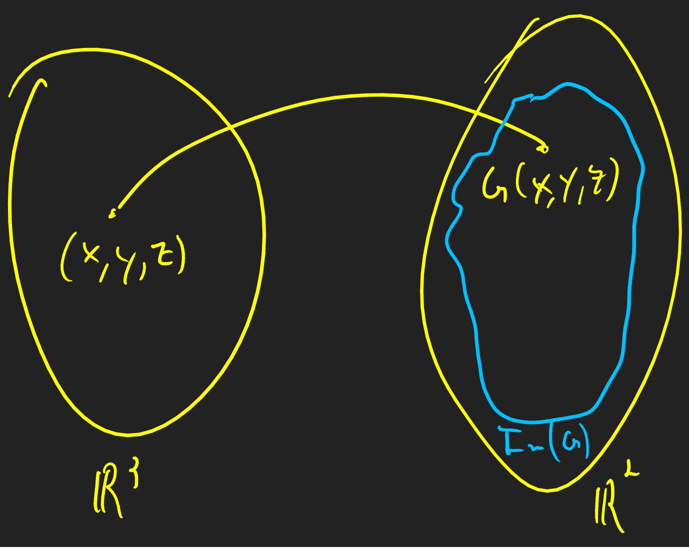
$$G(x,y,z) = x\,G(1,0,0) + y\,G(0,1,0) + z\,G(0,0,1)$$
$$= x(1,2) + y(2,3) + z(-4,1)$$

elementos de matriz da transf. G

Todo vetor da IMAGEM de G é combinação linear dos vetores (1,2), (2,3), (-4,1)

$$G(B) = \{(1,2), (2,3), (-4,1)\}$$ é GERADOR de Im(G)

é BASE de Im(G)???



Não é base pois não é L.I,
já que tem 3 vetores
e está em esp. vetorial de dim 2

$$\{(1,2), (2,3)\}$$

é um subconjunto L.I de G(B) com o máximo de elementos. Porntanto é base de Im(G).

$\{(1,2),(2,3)\}$ é base de Im(G) $\rightarrow \mathrm{Im}(G) = \mathbb{R}^2$?

logo dim(Im(G)) = 2

$\{(1,2),(2,3)\}$ Gera $\mathbb{R}^2$

Ou seja, TODOS os vetores de $\mathbb{R}^2$ estão na Im(G)

Então G é uma transformação SOBREJETORA