Definição

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um *produto interno* transforma cada par ordenado de vetores $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de V em um único número real denotado por $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ e obedece aos seguintes axiomas:

1. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$
2. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle$
3. $\langle \boldsymbol{u}, \alpha\boldsymbol{v} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$
4. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geqslant 0$, sendo que $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

No caso complexo

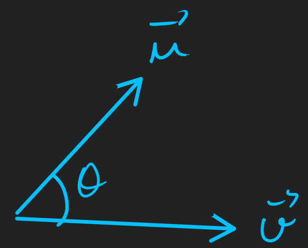
Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

- O produto interno é um número complexo.
- O Axioma 1 passa a ser $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle}$

Produto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} : \quad \begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \end{cases}$$

Definido: $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} \equiv \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$



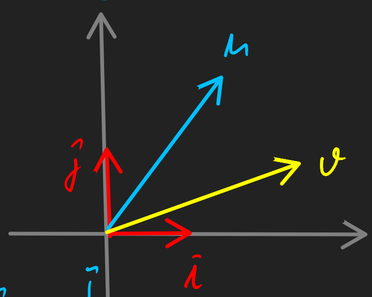
Coordenadas:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [\vec{u}]^T [\vec{v}]$$

$$[\vec{u}] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad [\vec{v}] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = xa + yb + zc$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \equiv \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xa + yb + zc$$



$$\begin{cases} \vec{u} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ \vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} \end{cases}$$

b

Generalizando:

$\mathbb{R}^3$: produto interno USUAL $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

$u = (x, y, z)$ $\Rightarrow$ $\langle u, v \rangle = xa + y\,b + zc$ } iguais

$v = (a, b, c)$ $\quad \langle v, u \rangle = ax + by + cz$ (Axioma 1)

$\mathbb{R}^2$: se $u = (x_1, x_2)$

$v = (y_1, y_2)$

Prod. interno: $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3 x_2 y_2$

Esta operação é UM produto interno.

Calcule o prod. interno $\langle u, v \rangle$ com $u = (1, 2)$, $v = (3, -1)$

$$\langle u, v \rangle = 1 \cdot 3 - 1(-1) - 2(3) + 3(2)(-1)$$
$$= 3 + 1 - 6 - 6 = -8.$$

Espaço vetorial das funções que são contínuas no intervalo [-1,1]

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt.$$

$f(t) = x^2 - 1$

$g(t) = x$

$\langle f, g \rangle = 0 \iff f \perp g$

f é ortogonal a g

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, x \, dx = \int_{-1}^{1} x^3 - x \, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right] = 0$$

Espaço vetorial das funções que são contínuas no intervalo [0,1]

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

$$f(t) = x^2 - 1 \qquad\qquad \langle f, g \rangle = -\frac{1}{4}$$

f e g NÃO SÃO ortogonais

$$g(t) = x$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 (x^2 - 1)\, x \, dx = \int_0^1 x^3 - x \, dx$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} \right] - \left[\frac{0}{4} - \frac{0}{2} \right] = -\frac{1}{4}$$

Espaço vetorial de matrizes reais

$$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$\langle A, B \rangle = tr(B^T A)$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$tr(B^T A) = tr\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \right) = tr \begin{pmatrix} ax + cz & \\ \cancel{ax} & by + dw \end{pmatrix}$$

$$tr(B^t A) = (ax + cz) + (by + dw) = ax + by + cz + dw$$

$$tr(B^t A) = [a\ c] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + [b\ d] \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix}$$

Ex.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\langle A, B \rangle = tr(B^T A) = tr\begin{pmatrix} (-1)1 + 1(3) & \cdots \\ \cdots & 0(2) + 3(-5) \end{pmatrix}$$

$$= -1 + 3 + 0 - 15 = -13.$$

$$\langle A, B \rangle = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = -1 + 3 + 0 - 15$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\langle A, B \rangle = (-1)(1) + 1(3) + 0(2) + 3(-5)$$

No caso complexo

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

- O produto interno é um número complexo.
- O Axioma 1 passa a ser $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle}$

No $\mathbb{C}^2$

$u = (z_1, z_2)$ $\qquad z_i = a + bi$

$v = (p_1, p_2)$

Produto interno usual

$$\langle u, v \rangle = \bar{z}_1 p_1 + \bar{z}_2 p_2 \Rightarrow \langle v, u \rangle = \bar{p}_1 z_1 + \bar{p}_2 z_2$$

Na base canônica: $[u] = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ $\quad [v] = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$

$$\langle u, v \rangle = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \overline{[u]}^t [v]$$

$$= [u]^\dagger [v]$$

$\dagger$ dagger (adaga)

$$A^{\dagger} = \overline{A^{t}}$$

$\dagger$ = dagger
(adaga)

$u^{\dagger}$ = u-adaga

Funções contínuas complexas

$$\langle f, g \rangle = \int_A \overline{f(z)}\, g(z)\, dz$$ ← quântica

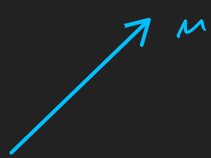
Norma de um vetor

Definição

Seja V um espaço vetorial dotado de produto interno. A *norma* do vetor $\boldsymbol{v}$ de V é o número real positivo dado por

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}.$$

Em VGA



$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|u\|\,\|u\| \cos(0)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|u\|^2$$

$$\vec{u} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

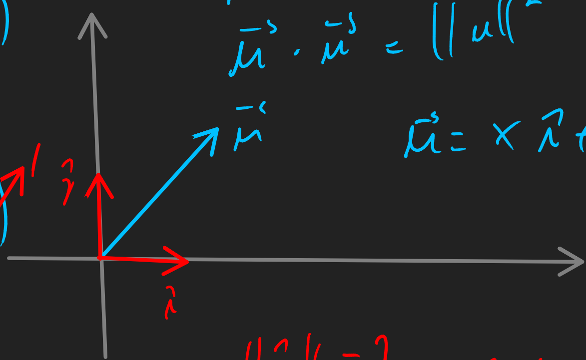
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) \cdot (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})$$

$$= x^2 \underbrace{(\hat{\imath} \cdot \hat{\imath})}_{1} + xy \underbrace{(\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath})}_{0}$$

$$+ yx \underbrace{(\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath})}_{0} + y^2 \underbrace{(\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath})}_{1}$$

$$= x^2 + y^2 = \|u\|^2$$

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$\|\hat{\imath}\| = 1$

$\|\hat{\jmath}\| = 1$

$\hat{\imath} \perp \hat{\jmath}$

FÓRMULA DE PARSEVAL

No espaço vetorial das funções contínuas em [-1,1]

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx$$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} \qquad f = x^2-1$$

$$\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^4-2x^2+1\,dx$$

$$\left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right] - \left[\frac{-1}{5} - \frac{-2}{3} - 1\right]$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2 = \frac{6-20}{15} + 2$$

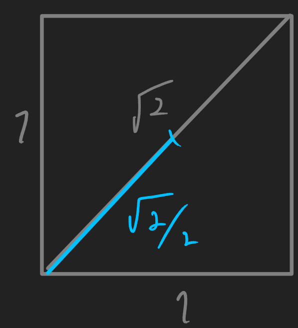
$$\langle f,f\rangle = 2 - \frac{14}{15} > 0.$$

$$= \frac{16}{15}$$

$$\|f\| = \sqrt{\frac{16}{15}}$$

$$\|x^2-1\| = \frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$



Normalize a função f(x) = x^2 -1

$$\frac{f}{\|f\|} = \frac{x^2-1}{\left(4/\sqrt{15}\right)} = \frac{\sqrt{15}}{4}\left(x^2-1\right) \quad //$$

No espaço vetorial de matrizes:

$$\langle A, B\rangle = tr(B^t A)$$

Matrizes complexas

$$\langle A, B\rangle = tr(B^\dagger A)$$

Calcule a norma da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = A$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$$

$$\langle A, A\rangle = 2(2) + 5(5) + (-2)(-2) + (3)(3)$$

$$4 + 25 + 4 + 9 = 42$$

$$\|A\| = \sqrt{42}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_3} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_4}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \langle aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4, aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4\rangle$$

$$= a\langle E_1, aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4\rangle +$$

$$+ b\langle E_2, aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4\rangle +$$

$$+ c\langle E_3, aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4\rangle +$$

$$+ d\langle E_4, aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$$

$$= a^2\overbrace{\langle E_1, E_1\rangle}^{1} + b^2\overbrace{\langle E_2, E_2\rangle}^{1} + c^2\overbrace{\langle E_3, E_3\rangle}^{1} + d^2\overbrace{\langle E_4, E_4\rangle}^{1} +$$

$$+ ab\underbrace{\langle E_1, E_2\rangle}_{0} + ba\underbrace{\langle E_2, E_1\rangle}_{0} + 2ac\underbrace{\langle E_1, E_3\rangle}_{0} + 2ad\underbrace{\langle E_1, E_4\rangle}_{0}$$

$$+ 2bc\underbrace{\langle E_2, E_3\rangle}_{0} + 2bd\underbrace{\langle E_2, E_4\rangle}_{0} + 2cd\underbrace{\langle E_3, E_4\rangle}_{0}$$

$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ //

Somente porque

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2} \right\rangle = 0$$

$\langle E_1, E_3 \rangle = 0 \qquad \langle E_1, E_4 \rangle = 0 \quad \ldots$

$\|E_i\| = 1$

$$B = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$$

$$\langle E_i, E_j \rangle = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{delta de Kronocker}} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

$\langle E_1, E_1 \rangle = \delta_{11} = 1$

$\langle E_1, E_3 \rangle = \delta_{13} = 0$

Nesse caso, B é um conjunto ORTONORMAL

(ISSO DEPENDE DA DEFINIÇÃO DE PRODUTO INTERNO)