Notas de aula ECT2202 T03 2021-12-16 Aula 14 — Álgebra de transformações

janeiro 2022						
do	se	te	qu	qu	se	sá
		15 16		17		1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

P2

Lista 2.2

18 + rec

Lista 2.1

10. Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ e seja $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $F(z) = \overline{z}$. Mostre que F é um operador linear. Se tivéssemos considerado o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, F ainda seria um operador linear?

$\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$: $\alpha z \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$z \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$

$z = a + bi$

$F(z) = \overline{z}$

$F(a+bi) = a - bi$

$F(\alpha z) = F(\alpha(a+bi)) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$= F(\alpha a + \alpha b i)$

$= \alpha a - \alpha b i$

$= \alpha F(a+bi)$

$\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ $\alpha z \in \mathbb{C}_{\mathbb{C}}$

$z \in \mathbb{C}_{\mathbb{C}}$

$\alpha \in \mathbb{C}$

$F(z) = \overline{z}$

$F(a+bi) = a - bi$

$\alpha = x + yi$

$F(\alpha z) = F((x+yi)(a+bi))$

$\vdots$

$\neq \underbrace{(x+yi)}_{\alpha} F(a+bi)$

$z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = z^* = a - bi$

8. Considere a seguinte transformação de $C^1(\mathbb{R})$[Nota 2] em $C(\mathbb{R})$ (espaço vetorial de funções contínuas nos reais):

$$D\left(f(t)\right) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

(a) Calcule $D(0)$

(b) Calcule $D(\cos(t))$

(c) Calcule $D(\cos(t) + 3t^2 - 2t + 1)$

(d) D é linear? ← sim

(e) D é injetora?

[Nota 2] $C^1(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial das funções reais que têm derivada contínua

$a + bt + ct^2$

e) D é injetora? $\iff \dim(\ker(D)) = 0$?

$\ker(D) = f$ tal que $\frac{df}{dt} = 0$

$f(t) = \alpha 1 \in \ker(D)$

$\dim(\ker(D)) = 1$

$\ker(D) = \text{span}\{1\}$

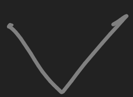
[1 vetor]

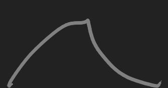
$f(t) = |t| \in C(\mathbb{R})$

$\notin C^1(\mathbb{R})$

$|t| = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ -t & \text{se } t < 0 \end{cases}$ contínua:

$\frac{d}{dt}|t| = \begin{cases} \frac{dt}{dt} & \text{se } t \geq 0 \\ -\frac{dt}{dt} & \text{se } t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$



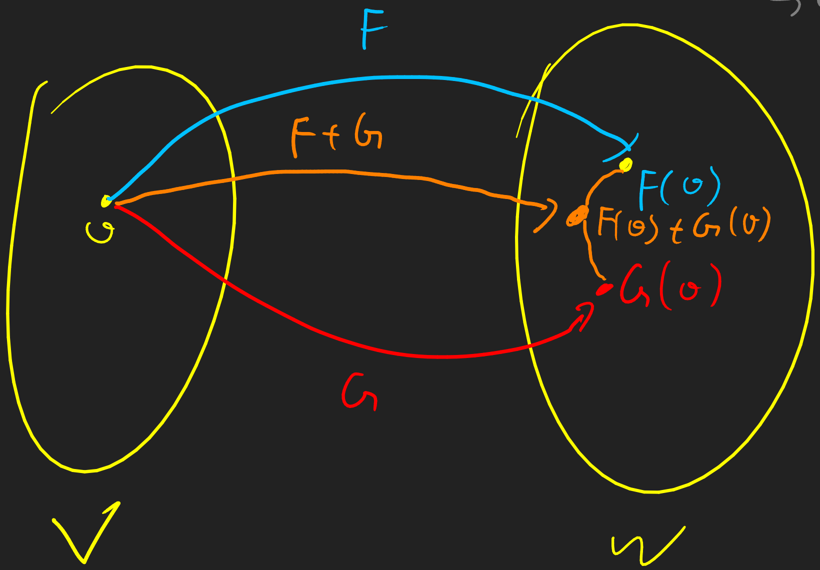


não é contínua nos $\mathbb{R}$

não é contínua em $t = 0$

Álgebra de transformações

Fixados os espaços vetorias V e W sobre o corpo $\mathbb{K}$ $\begin{cases} \to \mathbb{R} \\ \to \mathbb{C} \end{cases}$



Sejam F e G transformações lineares entre V e W

L(V,W) é o conjunto de TODAS as transformações lineares entre V e W

Adição de transformações lineares

$$F+G : V \to W \qquad (F \overset{\text{Adição em } L(V,W)}{+} G)(v) = F(v) \overset{\text{adição em } W}{+} G(v)$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(t) = \operatorname{sen}(t)$ $\qquad$ $g(t) = \cos(t)$

$(f+g)(t) = \operatorname{sen}(t) + \cos(t)$

$F+G$ é linear

$$(F+G)(u+v) = F(u+v) + G(u+v)$$
$$= F(u) + F(v) + G(u) + G(v)$$
$$= F(u) + G(u) + F(v) + G(v)$$
$$= (F+G)(u) + (F+G)(v)$$

(Aditiva)

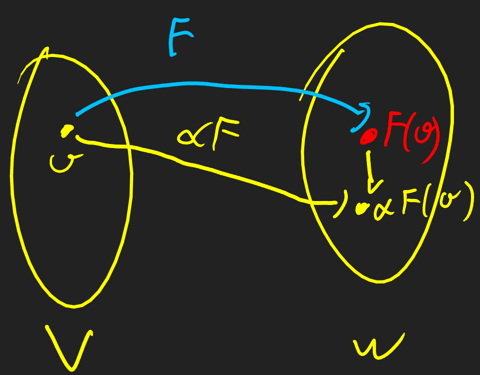
$$(F+G)(\alpha u) = \alpha(F+G)(u)$$

(exercício)

O conjunto L(V,W) é FECHADO POR ADIÇÃO

MULTIPLICAÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR POR ESCALAR.

$$(\alpha F)(v) = \alpha F(v)$$



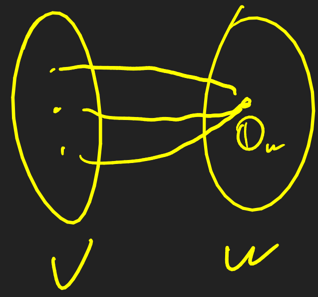
αF será transformação linear de V em W.

Então L(V,W) será fechado por multiplicação pór escalar.

Logo, L(V,W) É UM ESPAÇO VETORIAL SOBRE O CORPO $\mathbb{K}$

Vetor nulo: $0_{L(V,W)} = F(v) = 0_W$

$\ker(0_{L(V,W)}) = V$



Se $\dim V = n$ e $\dim W = m$

então $\dim(L(V,W)) = nm$

note: $\dim(M_{m \times n}) = nm$

isomorfos.

Existe uma transformação linear BIJETORA que associa cada transf. de L(V,W) em uma ÚNICA matriz n×m

11. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares definidas por

$$F(x, y, z) = (x + y, z)$$
$$G(x, y, z) = (x, y - z)$$

(a) Calcule $(F + G)(\boldsymbol{v})$, com $\boldsymbol{v} = (2, 3, 4)$.

(b) Obtenha uma expressão para a transformação $F + G$

(c) Calcule $(2F - 3G)(\boldsymbol{v})$, com $\boldsymbol{v} = (2, 3, 4)$.

(d) Obtenha uma expressão para a transformação $2F - 3G$

$V = \mathbb{R}^3 \quad W = \mathbb{R}^2$

a) $(F+G)(2,3,4) = F(2,3,4) + G(2,3,4)$

$= (2+3, 4) + (2, 3-4)$

$= (5, 4) + (2, -1) = (7, 3)$

$F(x, y, z) = (x + y, z)$
$G(x, y, z) = (x, y - z)$

b) $(F+G)(x,y,z) = F(x,y,z) + G(x,y,z)$

$= (x+y, z) + (x, y-z)$

$(F+G)(x,y,z) = (2x+y, y)$ //

$F(x, y, z) = (x + y, z)$
$G(x, y, z) = (x, y - z)$

(c) Calcule $(2F - 3G)(\boldsymbol{v})$, com $\boldsymbol{v} = (2, 3, 4)$.

(d) Obtenha uma expressão para a transformação $2F - 3G$

c) $(2F - 3G)(v) = 2F(v) - 3G(v)$

$= 2F(2,3,4) - 3G(2,3,4)$

$= 2(5,4) - 3(2,-1)$

$= (10,8) - (6,-3)$

$= (4,11)$ //

d) $(2F - 3G)(x,y,z) = 2F(x,y,z) - 3G(x,y,z)$

$= 2(x+y, z) - 3(x, y-z)$

$(2F - 3G)(x,y,z) = (-x+2y, 5z - 3y)$

---

15. Seja $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ base canônica do $\mathbb{R}^3$. Se $F \in L(\mathbb{R}^3)$ é o operador tal que

$$F(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_2$$
$$F(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_3$$
$$F(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1,$$

(a) determine $F(x, y, z)$

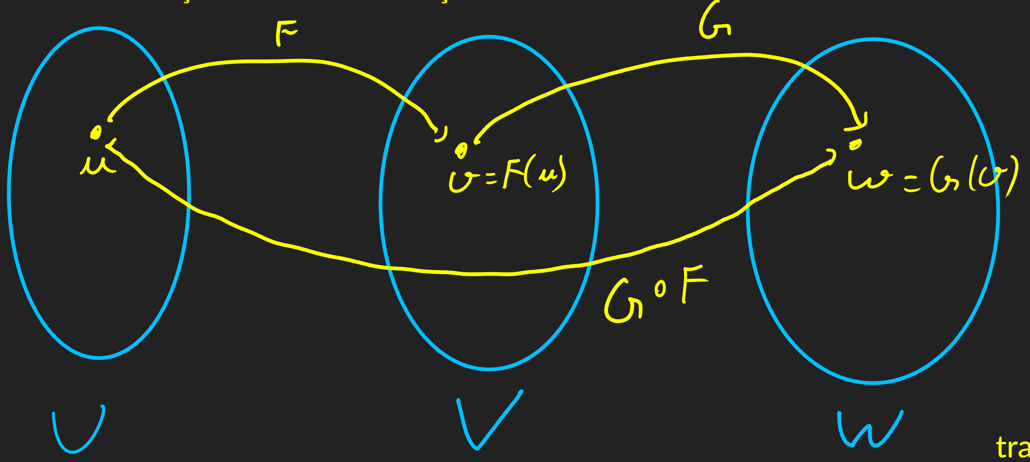
(b) e mostre que $F^3 = \mathbb{I}$ e, portanto, $F^2 = F^{-1}$. [Nota 3]

(c) Obtenha uma expressão para F^{100}.

$F^3 = F \circ F \circ F$

COMPOSIÇÃO de transformações lineares

COMPOSIÇÃO de transformações lineares



$F : U \to V$

$G : V \to W$

$\underbrace{G \circ F}_{\text{transformação composta}} : U \to W$

$$w = G(v) = G(F(u))$$

$$v = F(u)$$

$$w = \underbrace{(G \circ F)}_{\text{g-bola-f}}(u) = G(F(u))$$

Funciona como um produto (não comutativo)

Caso U = V = W $\qquad F, G, H \in L(V)$ operadores lineares em V

Propriedades:

- $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$ ASSOCIATIVA
- $F \circ (G + H) = (F \circ G) + (F \circ H)$ DISTRIBUTIVA
- $(F + G) \circ H = (F \circ H) + (G \circ H)$

Em geral $\quad F \circ G \neq G \circ F$ NÃO COMUTATIVA

Existe a transformação IDENTIDADE $\quad I(v) = v$

$$F \circ I = I \circ F = F.$$

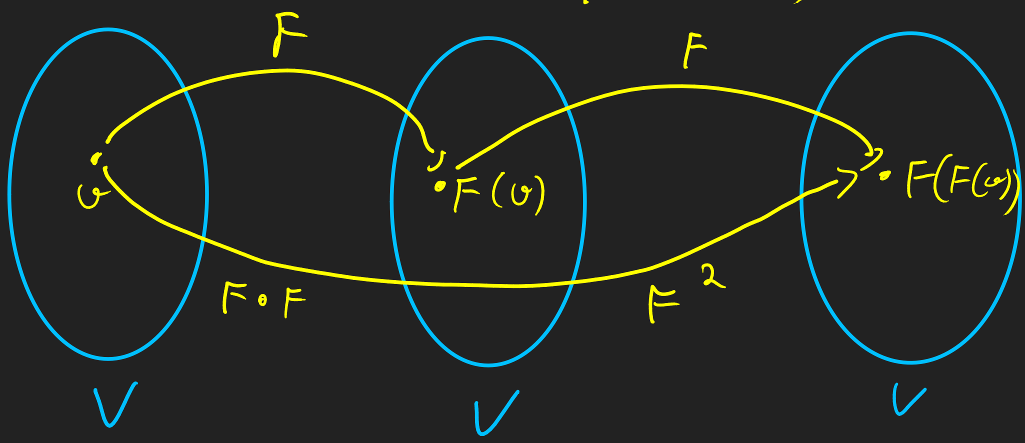
$L(V), +, \alpha, \circ$ GRUPO

existe o grupo das matrizes.

definir POTÊNCIA de operador linear.

$F : V \to V$, linear

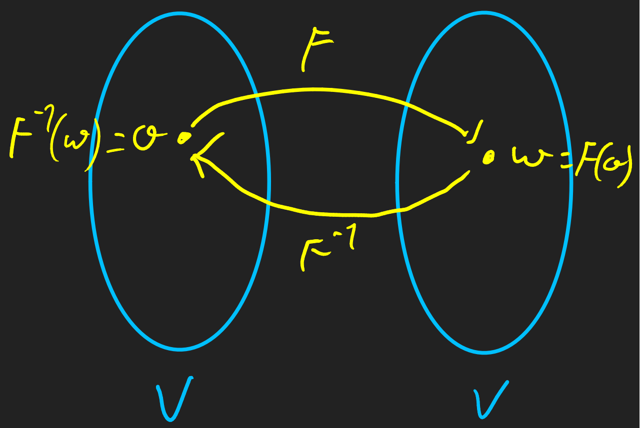
$F \in L(V)$



$$F^2 = F \circ F$$

$$F^3 = F \circ F \circ F = F \circ F^2$$

$$F^0 = \mathbb{I} \iff F^0(v) = v$$



$$F^{-1}(w) = v \iff F(v) = w$$

se F for bijetora

$$F \circ F^{-1} = \mathbb{I} = F^0$$

15. Seja $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ base canônica do $\mathbb{R}^3$. Se $F \in L(\mathbb{R}^3)$ é o operador tal que

$$F(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_2$$
$$F(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_3$$
$$F(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1,$$

(a) determine $F(x, y, z)$

(b) e mostre que $F^3 = \mathbb{I}$ e, portanto, $F^2 = F^{-1}$. [Nota 3]

(c) Obtenha uma expressão para F^{100}.

$e_1 = (1,0,0) \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1)$

$$F(x,y,z) = F(x e_1 + y e_2 + z e_3)$$
$$= x F(e_1) + y F(e_2) + z F(e_3)$$
$$= x e_2 + y e_3 + z e_1$$

$$F(x,y,z) = (z,x,y)$$

$$F^3(x,y,z) = F(F(F(x,y,z))) = F(F(z,x,y))$$
$$= F(y,z,x)$$
$$F^3(x,y,z) = (x,y,z) = \mathbb{I}$$

$$F^3 = F^2 \circ F = \mathbb{I}$$

pela definição de F^{-1}

$$F^{-1} \circ F = \mathbb{I}$$

$$F^2 = F^{-1}$$

c) $$F^{100} = F^{(99+1)} = F^{99} \circ F$$
$$= F^{3(33)} \circ F$$
$$= (F^3)^{33} \circ F$$
$$= (\mathbb{I})^{33} \circ F = F$$ //

Inversa à esquerda E INVERSA À DIREITA

$$(F^{-1} \circ F)(v)$$
$$F^{-1}(F(v))$$

$$(F \circ F^{-1})(v)$$
$$F(F^{-1}(v))$$

$$\int \left(\frac{d}{dt} f(t)\right) dt \; : \; D^{-1} \circ D(f) \qquad \neq \qquad \frac{d}{dt}\left(\int f(t)\, dt\right)$$

↳ const. integração

↓ única.

$$D \circ D^{-1}(f)$$

esta transformação não é única

$$f(x) = x^2$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \sqrt{x^2} \; ✓ \quad \Leftrightarrow \quad f \circ f^{-1} = (\sqrt{x})^2 \; ✗$$