Notas de aula ECT2202 T03 2022-01-11 Aulas 15-16 — Matriz de transformação

Aplicando a um vetor

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}) &= F\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\mathbf{v}_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\beta_j F(\mathbf{v}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\mathbf{w}_i\right) \\ F(\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_j\right)\mathbf{w}_i \end{aligned}$$

Multiplicação de matrizes:

A expressão $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_j$ é a i-ésima linha da matriz coluna, produto das matrizes:

$$[\alpha_{ij}]\;[\beta_j] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

onde $[\beta_j] = [\mathbf{v}]_B$ é a matriz de coordenadas do vetor $\mathbf{v}$ na base B. Ou seja:

$$[F(\mathbf{v})]_C = [\alpha_{ij}]\;[\mathbf{v}]_B$$

Definição

A matriz

$$[F]_C^B = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

é a matriz da transformação F em relação às bases B e C.

As colunas de $[F]_C^B$ são as coordenadas de $F(\mathbf{v}_j)$:

$$[F]_C^B = [[F(\mathbf{v}_1)]_C \quad [F(\mathbf{v}_2)]_C \quad \cdots \quad [F(\mathbf{v}_n)]_C]$$

$F: V \to W$ Base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V

$C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ de W

$\dim(V) = n$

$\dim(W) = m$

$v \in V \Rightarrow$ coordenadas $[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

$w \in W \Rightarrow$ coordenadas $[w]_C = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$

se $w = F(v)$: $[F(v)]_C = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$

$$v \xrightarrow{F} F(v)$$

$$[v]_B \xrightarrow{F} [F(v)]_C$$

$$[F(v)]_C = [F]_C^B\,[v]_B$$

Definição

A matriz

$$[F]_C^B = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

é a matriz da transformação F em relação às bases B e C.

As colunas de $[F]_C^B$ são as coordenadas de $F(\mathbf{v}_j)$:

$$[F]_C^B = \begin{bmatrix} [F(\mathbf{v}_1)]_C & [F(\mathbf{v}_2)]_C & \cdots & [F(\mathbf{v}_n)]_C \end{bmatrix}$$

$$[F(v)]_C = [F]_C^B [v]_B$$

matriz mudança de base $\quad [v]_D = [I]_D^B [v]_B$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}_C = \underset{(m \times n)}{[F]_C^B} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_B$$

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$[F]_C^B = \begin{bmatrix} [F(v_1)]_C & \cdots & [F(v_n)]_C \end{bmatrix}$$

Nota: espaço vetorial das matrizes $\quad M_{m \times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

V

$F: V \to V \quad$ base B, canônica

$$F\left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{12} \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cdot & - & - & - \\ - & & - & - \\ & - & - & \\ & - & - & \end{pmatrix}$$

$$[F]_B = \begin{bmatrix} & n \times n & \\ \cdot & - \cdots & - \\ & (n \times n) & \\ \cdot & & \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \quad F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) \quad F(x,y,z) = (x+y, y+z)$$

a) Obtenha a matriz [F], em relação às bases canônicas dos espaços.
b) obtenha [F(3,2,-5)]

a)
$$[F] = \begin{bmatrix} [F(1,0,0)] & [F(0,1,0)] & [F(0,0,1)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [(1,0)] & [(1,1)] & [(0,1)] \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os espaços vetoriais $L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ e M_{2x3} SÃO ISOMORFOS
$\dim(L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2) = \dim(M_{2x3})$
$\dim(L(V,W)) = \dim(V) \dim(W)$

b)
$$[F(3,2,-5)] = [(3+2, 2-5)] = [(5,-3)] = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$[F(3,2,-5)] = [F][(3,2,-5)] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 \\ 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Imagem 720p: 1280×720 pixels
921600 pixels ~ 1 Mpixel

Exemplo:

$$G: P_1 \to P_1$$

$$G(a+bt) = (2a+b) - at$$

obtenha a matriz desse operador em relação à base canônica C ={1,t}

$$[G] = \left[[G(1)] \quad [G(t)] \right] = \left[[2-t] \quad [1] \right]$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[G(5-8t)] = [G][5-8t] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 - 8 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Exercício

$$D: P_4 \to P_4 \qquad D(f) = \frac{df}{dt}$$

Obtenha [D], a matriz do operador D em relação à base canônica de P_5

Representação matricial de operações com transformações

$S: V \to W$ existe $(S+T): V \to W$

$T: V \to W$ $\quad (S+T)(v) = S(v) + T(v)$

dado $[S]^B_C$, $[T]^B_C$ obter $[S+T]^B_C$

$$[S+T]^B_C = [S] + [T]$$

adição do espaço vetorial L(V,W)

adição no espaço vetorial de matrizes

Existe transf $M: L(V,W) \to M_{m \times n}$

$$M(F) = [F]$$

M é Linear pois

$$\begin{cases} [S+T] = [S] + [T] \\ [\lambda S] = \lambda [S] \end{cases}$$

Exemplos: Sejam $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$S = (x+2y, 4x)$

$T = (y, x+3y)$

a) obtenha as matrizes [S] e [T] em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$
b) obtenha [S+T]
c) obtenha [SoT]

$$S = (x+2y,\ 4x)$$
$$T = (y,\ x+3y)$$

$$[S] = \left[[S(1,0)] \quad [S(0,1)] \right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$[T] = \left[[T(1,0)] \quad [T(0,1)] \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[S+T] = [S] + [T] = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+1 \\ 4+1 & 0+3 \end{bmatrix}$$

$$[S+T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} //$$

Alternativamente

$$(S+T)(x,y) = S(x,y) + T(x,y) =$$
$$= (x+2y,\ 4x) + (y,\ x+3y)$$
$$= (x+3y,\ 5x+3y)$$

$$[S+T] = \left[[(S+T)(1,0)] \quad [(S+T)(0,1)] \right]$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} //$$

$[S \circ T]$:

$$(S\circ T)(x,y) = S(T(x,y))$$
$$= S(y, x+3y)$$
$$= (y + 2(x+3y), 4y)$$
$$(S\circ T)(x,y) = (2x + 7y, 4y)$$

$$[S\circ T] = \big[\, [(S\circ T)(1,0)] \;\; [(S\circ T)(0,1)] \,\big]$$

$$[S\circ T] = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \,//$$

Alternativamente

$$[(S\circ T)(v)] = [S(T(v))] = [S][T(v)]$$
$$= [S]([T][v])$$
$$= ([S][T])[v]$$

$$\downarrow$$

$$[S\circ T][v] = ([S][T])[v]$$

$$[S\circ T] = [S][T]$$

$$[S\circ T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+2 & 1+6 \\ 0+0 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \,//$$

$$[S \circ T][v] = [S][T][v]$$

$$[v] = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[S \circ T][v] = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+21 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$[S \circ T][v] = [S][T][v]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Note

$$[(T \circ S)(v)] = [T][S][v] \neq [S][T][v] = [(S \circ T)(v)]$$