Notas de aula ECT2202 T03 2021-11-16 Aulas 05-06 — Bases, dimensão

Lista 1.1

18. Mostre que o conjunto $\{1, \text{sen}(t), \text{sen}(2t)\}$ de vetores de $C(\mathbb{R})$ é linearmente independente.

L.I

19. Obtenha uma base para o subespaço das funções contínuas gerado por $\{\text{sen}(t), \text{sen}(2t), \text{sen}(t)\cos(t)\}$. Qual a dimensão desse espaço?

L.I

Base:

Seja B um conjunto de vetores de um espaço vetorial V que seja
- Gerador desse espaço vetorial: V = [B] = ger(B) = span(B)
- Linearmente Independente

19:

B = { sen(t), sen(2t), sen(t) cos(t) }

v_1, v_2, v_3

$S = [B]$ ou seja $S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3\}$

mostrar que B é L.I. ou, se for L.D., remover de B os elementos que são comb. linear dos demais.

$$\alpha\, \text{sen}(t) + \beta\, \text{sen}(2t) + \gamma\, \text{sen}(t)\cos(t) = \emptyset = 0$$

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a)$$

$$\text{sen}(2t) = \text{sen}(t+t) = \text{sen}(t)\cos(t) + \text{sen}(t)\cos(t)$$
$$= 2\,\text{sen}(t)\cos(t)$$

Logo $\text{sen}(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\text{sen}(2t)$

Então B é L.D.

Logo B não é base. Mas temos

$B_1 = \{\text{sen}(t), \text{sen}(2t)\}$ também gera o subespaço do enunciado

$$\begin{cases} \alpha\, \text{sen}(t) + \beta\, \text{sen}(2t) = 0 \\ \alpha = \beta = 0. \end{cases}$$

$$\alpha\ sen(t) + \beta\ sen(2t) = 0$$ 2 inc: α, β

independente do valor de t

2 equações:

Escolher dois valores de t

$t=0$ $\quad \alpha\ sen(0) + \beta\ sen(0) = 0$

$\alpha\ 0 + \beta\ 0 = 0$ $\quad$ ✗

0 equações.

$t = \pi/2$

$$\alpha\ sen(\pi/2) + \beta\ sen(2\ \pi/2) = 0$$

$$1\alpha + 0\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \ //$$

$t = \pi/4$

$$\alpha\ sen(\pi/4) + \beta\ sen(2\ \tfrac{\pi}{4}) = 0$$

$$0 + \beta\ sen(\pi/2) = 0$$

$$\beta = 0 \ //$$

Logo $B_1 = \{ sen(t), sen(2t) \}$ é L.I.

portanto base do espaço gerado por B_1

//

$$\begin{cases} \alpha\ sen(t) + \beta\ sen(2t) = 0 \\ \alpha \cos(t) + 2\beta \cos(2t) = 0 \end{cases}$$

Questão 1:

(b) O conjunto das funções a valores reais. $F(\mathbb{R})$

Escalares $\alpha \in \mathbb{R}$

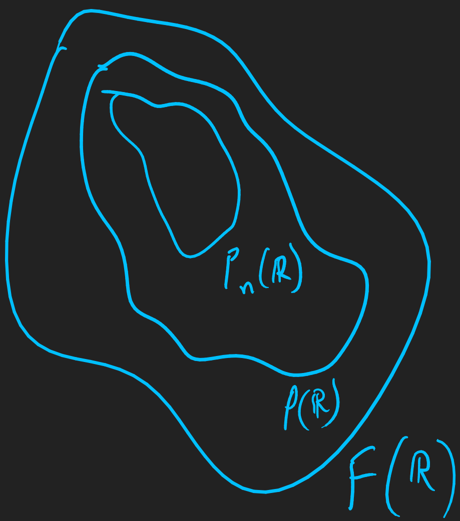
Adição $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$.

Multiplicação por escalar $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$

(c) $P_n(\mathbb{R})$, o conjunto dos polinômios[Nota 1] de grau $\leqslant n$ a valores reais:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

[Nota 1] Dica: todo polinômio é uma função.



Se $F(\mathbb{R})$ é espaço vetorial

então $P_n(\mathbb{R})$ será espaço vetorial se for subespaço de $F(\mathbb{R})$

Basta mostrar fechamento.

$$f = f(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$$

$$g = g(t) = \sum_k \beta_k t^k$$

$$f+g = \overbrace{\sum_k^n \alpha_k t^k}^{f} + \overbrace{\sum_k^n \beta_k t^k}^{g}$$

$$= \sum_k^n \left(\alpha_k t^k + \beta_k t^k\right)$$

$$= \sum_k^n \underbrace{(\alpha_k + \beta_k)}_{\gamma_k \in \mathbb{R}.} t^k \in F$$

Fech. por adição

$$\lambda f = \lambda \sum_k \alpha_k t^k = \lambda(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots)$$

$$= \sum_k \underbrace{(\lambda \alpha_k)}_{\hookrightarrow \gamma_k \in \mathbb{R}} t^k \quad \checkmark$$

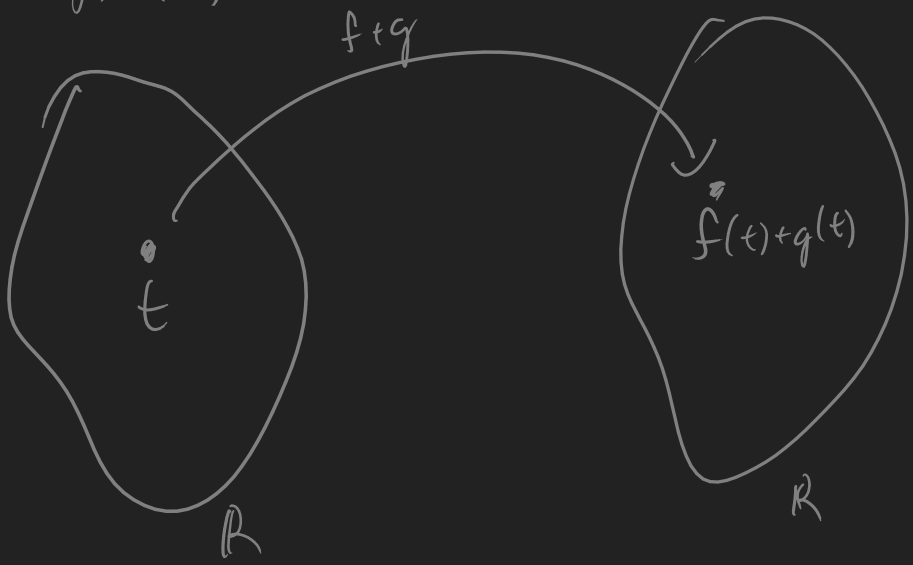
(b) O conjunto das funções a valores reais.

Escalares $\alpha \in \mathbb{R}$

Adição $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$.

Multiplicação por escalar $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$

$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \rightarrow f+g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$f+g = g+f$

$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ ✓

$(g+f)(t) = g(t) + f(t)$

$\rightarrow \mathbb{R}$

$= f(t) + g(t) = (f+g)(t)$

15. Mostre que conjunto $\boxed{B = \{1+t, 1-t+t^2, 1-t^2\}}$ é uma base do $P_2(\mathbb{R})$. Obtenha uma base para o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ tais que $p(0) = 0$.

16. Obtenha $[I]_C^B$, a matriz mudança de base da base B do exercício anterior para a base canônica $C = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Obtenha em seguida $[I]_B^C$. Mostre que $[I]_C^B = \left([I]_B^C\right)^{-1}$.

$$B = \{\underbrace{1+t}_{p_1},\ \underbrace{1-t+t^2}_{p_2},\ \underbrace{1-t^2}_{p_3}\}$$

$$C = \{1, t, t^2\}$$

$$v = \alpha + \beta t + \gamma t^2$$

$[I]_C^B$:

$$[v]_C = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{t.q.} \quad v = x p_1 + y p_2 + z p_3$$

$$\alpha + \beta t + \gamma t^2 = x(1+t) + y(1-t+t^2) + z(1-t^2)$$

$$[v]_C = [I]_C^B \, [v]_B$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$B = \{p_1, p_2, p_3\}$

$$[I]_C^B = \begin{bmatrix} [p_1]_C & [p_2]_C & [p_3]_C \end{bmatrix}$$

$$B = \{ \underset{p_1}{1+t}, \quad \underset{p_2}{1-t+t^2}, \quad \underset{p_3}{1-t^2} \}$$

$$C = \{ \underset{e_1}{1}, \underset{e_2}{t}, \underset{e_3}{t^2} \}$$

$$[I]_C^B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [p_1]_C & [p_2] & [p_3]_C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[p_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff 1+t = 1(1+t) + 0\, p_2 + 0\, p_3$$

$$[p_1]_C = [I]_C^B \, [p_1]_B$$

$$[p_1]_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+0 \\ 1+0+0 \\ 0+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = 1(1) + 1(t) + 0(t^2) = 1+t \ \checkmark$$

$$[I]_B^C = \begin{bmatrix} [1]_B & [t]_B & [t^2]_B \end{bmatrix}$$

$$[1]_B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \text{ t. q. } \quad 1 = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3$$

$$1 = \alpha(1+t) + \beta(1-t+t^2) + \gamma(1-t^2)$$

$$1 = \alpha(1+t) + \beta(1-t+t^2) + \gamma(1-t^2)$$

$$1 + 0t + 0t^2 = (\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha-\beta)t + (\beta-\gamma)t^2$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 1 \\ \alpha = \beta \\ \beta = \gamma \end{cases} \qquad \alpha = \beta = \gamma = 1/3$$

$$1 = \frac{1}{3}(1+t) + \frac{1}{3}(1-t+t^2) + \frac{1}{3}(1-t^2)$$
$$= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)t + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)t^2$$

$$[1]_B = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}_B$$

$$[e_2]_B = [t]_B$$

$$0 + t + 0t^2 = (\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha-\beta)t + (\beta-\gamma)t^2$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 1 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\beta+\beta+\beta = 0 \\ \alpha = 1+\beta \\ \beta = \gamma \end{cases}$$

$$1 + 3\beta = 0 \Rightarrow \beta = -1/3$$
$$\gamma = -1/3$$
$$\alpha = 2/3$$

$$[t]_B = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$[t^2]_B$:

$$t^2 = \alpha(1+t) + \beta(1-t+t^2) + \gamma(1-t^2)$$

$$t^2 = (\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha-\beta)t + (\beta-\gamma)t^2$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha-\beta = 0 \\ \beta-\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\alpha+\gamma = 0 \\ \alpha = \beta \\ \alpha-\gamma = 1 \end{cases}$$

$$\alpha = 1+\gamma$$
$$\beta = 1+\gamma$$

$$(1+\gamma)+(1+\gamma)+\gamma = 0$$

$$2+3\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -2/3$$

$$\beta = \alpha = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$[t^2]_B = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

$$[I]^C_B = \begin{bmatrix} [1]_B & [t]_B & [t^2]_B \end{bmatrix}$$

$$[I]^C_B = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$v = a+bt+ct^2 \Rightarrow [v]_C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$[v]_B = [I]_B^C \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$[t]_B = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\left([I]_B^C\right)^{-1} = [I]_C^B$$

$$[I]_B^C \left([I]_B^C\right)^{-1} = \mathbb{1}$$

$$[I]_B^C \, [I]_C^B = \mathbb{1}$$

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1/3 + 2/3 & 1/3 - 2/3 + 1/3 & 1/3 - 1/3 \\ 1/3 - 1/3 & 1/3 - (-1/3) + 1/3 & 1/3 - 1/3 \\ 1/3 - 1/3 & 1/3 - (-1/3) - 2/3 & 1/3 - (-2/3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo $[I]_C^B = \left([I]_B^C\right)^{-1}$ //

Questionário multiprova

$$tr(B^t A)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & & \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$tr(C) = c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$tr(B^t A) =$$

$$B^t A = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + \dots & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix}$$