

7. Mostre que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ com a adição usual e a multiplicação αu usual entre um número real α e um número complexo $u = (a + bi)$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais. Nesta notação a e b são números reais e $i^2 = -1$.

$$\mathbb{C} = \{ (a + bi) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \}$$

$$\begin{aligned} u + v &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO DE
ADIÇÃO.

ARBITRÁRIA

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha u &= \alpha (a + bi) \\ &= (\alpha a) + (\alpha b)i \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO DE
MULTIPLICAÇÃO
POR ESCALAR (real)

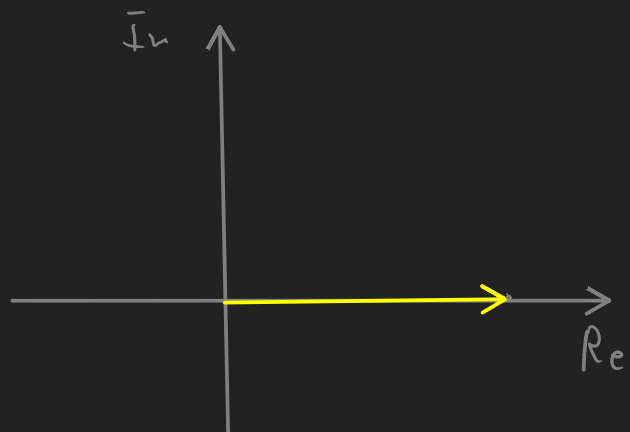
TESTAR AVALIDADE DOS 10 AXIOMAS DE ESP. VETORIAL

1. **Fechamento por adição:** A adição entre dois elementos u e v quaisquer de V resulta em um *único* elemento de V , denotado por $u + v$ e chamado de *soma* de u e v .

$$u + v = (a + bi) + (c + di) = \underbrace{(a + c)}_{\substack{\text{SOMA} \\ \text{DE REAIS.} \\ \text{NÚMERO REAL}}} + (b + d)i$$

$$u + v = \underbrace{(a + c)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(b + d)}_{\in \mathbb{R}} i \in \mathbb{C}$$

LOGO A ADIÇÃO É OPERAÇÃO FECHADA.



2. **Fechamento por multiplicação por escalar:** A multiplicação entre um elemento $\alpha \in \mathbb{K}$, denominado *escalar*, e um elemento $u \in V$ resulta em um *único* elemento de V , denotado por $\alpha \cdot u$ (ou αu), chamado *produto* de α e u .

$$\alpha u = \alpha(a + bi) = (\underbrace{\alpha a}_{\substack{\text{produto} \\ \text{de reais} \\ \text{REAL.}}}) + (\underbrace{\alpha b}_{\in \mathbb{R}})i \in \mathbb{C}$$

LOGO, O CONJUNTO $\mathbb{C}$ É FECHADO POR MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR.

3. **Comutatividade da adição:** $u + v = v + u$
4. **Associatividade da adição:** $u + (v + w) = (u + v) + w$
5. **Existência da identidade da adição:** Existe um elemento em V , denotado por 0 e chamado de *vetor nulo* tal que $u + 0 = u$ para todo $u \in V$.
6. **Existência do oposto:** Para cada elemento $u \in V$ existe um elemento, chamado *oposto* de u e denotado por $(-u)$, tal que $u + (-u) = 0$.

Por construção, os vetores são elementos do corpo dos complexos.

Por ser corpo, o conj. dos complexos satisfaz a esses axiomas da sua adição

$$\exists: (a + bi) + (c + di) = a + bi$$

$$(a + c) + (b + d)i = a + bi$$

$$\begin{cases} a + c = a & \Rightarrow c \text{ é o elemento neutro dos reais. } \Rightarrow c = 0 \\ b + d = b & \Rightarrow d \text{ é o elemento neutro dos reais. } \Rightarrow d = 0 \end{cases}$$

Conclusão: $(0 + 0i) = 0$

7. **Associatividade da multiplicação por escalares:** $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

$\rightarrow$ mult. vetor p/ esc.

$\rightarrow$ mult. escalar

7. Associatividade da multiplicação por escalares: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

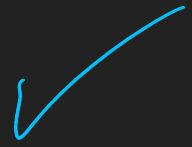
$$\begin{aligned}\alpha(\beta u) &= \alpha[\beta(a+bi)] \\ &= \alpha[(\beta a) + (\beta b)i] \\ &= [\alpha(\beta a)] + [\alpha(\beta b)]i\end{aligned}$$

multiplicação de reais
ASSOCIATIVA.

$$= [(\alpha\beta)a] + [(\alpha\beta)b]i //$$

$$(\alpha\beta)u = (\alpha\beta)(a+bi)$$

$$[(\alpha\beta)a] + [(\alpha\beta)b]i$$



LOGO, A MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR É ASSOCIATIVA.

8. Distributividade da soma de escalares: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

$$(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(a+bi)$$

$$= [(\alpha + \beta)a] + [(\alpha + \beta)b]i$$

DISTRIBUTIVA
DOS REAIS

DISTRIBUTIVA
DOS REAIS

$$= [\alpha a + \beta a] + [\alpha b + \beta b]i //$$

$$\alpha u + \beta u = \alpha(a+bi) + \beta(a+bi)$$

$$[(\alpha a) + (\alpha b)i] + [(\beta a) + (\beta b)i]$$

$$[\alpha a + \beta a] + [\alpha b + \beta b] i //$$

AXIOMA SATISFEITO.

9. Distributividade da soma de vetores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

$$u = a + bi \quad v = c + di$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \alpha(u + v) &= \alpha[(a + bi) + (c + di)] \\ &= \alpha[(a + c) + (b + d)i] \\ &= [\underbrace{\alpha(a + c)}] + [\underbrace{\alpha(b + d)}] i \end{aligned}$$

DISTRIBUTIVA
DOS REAIS

DISTRIBUTIVA
DOS REAIS

$$= [\alpha a + \alpha c] + [\alpha b + \alpha d] i //$$

$$\begin{aligned} \alpha u + \alpha v &= \alpha(a + bi) + \alpha(c + di) \\ &= [(\alpha a) + (\alpha b)i] + [(\alpha c) + (\alpha d)i] \\ &= [\alpha a + \alpha c] + [\alpha b + \alpha d] i // \end{aligned}$$

VALE O AXIOMA 9.

10. **Unidade:** $1 \cdot u = u$, onde 1 é a unidade do corpo $\mathbb{K}$.

γ : identidade dos $\mathbb{R}$.

$$\gamma u = \gamma(a + bi)$$

$$(\gamma a) + (\gamma b)i = a + bi = u.$$

9. **Existência da identidade da multiplicação:** Existe um elemento em $\mathbb{K}$, diferente de 0, denotado por 1 e chamado de *unidade ou elemento neutro da multiplicação* tal que $1 \cdot \alpha = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\gamma a = a$$

$$\gamma b = b$$

AXIOMA 10 SATISFEITO.

FINALMENTE, $\mathbb{C}$ FORMAM UM ESP. VETORIAL SOBRE $\mathbb{R}$

1. Partindo dos axiomas de corpo (vide notas de aula e Apostol Vol. 1), demonstre os seguintes teoremas, com a, b e c elementos do corpo:

(a) Lei do cancelamento para adição: Se $a + b = a + c$, então $b = c$. (Dica: adicione o oposto de a aos dois lados da igualdade).

(b) $-(-a) = a$ ←

B) O OPOSTO DO OPOSTO DE a É a .

10. **Existência do oposto:** Para cada elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ existe um elemento, chamado *oposto* de α e denotado por $(-\alpha)$, tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$.

$$a + (-a) = 0 \quad \text{por definição de } (-a)$$

adição é comutativa, logo $(A \times, +)$

$$(-a) + a = 0 \quad \leftarrow$$

O oposto de $(-a)$, notação: $-(-a)$,

$$(-a) + [-(-a)] = 0$$

É n.º 1.º:

$$0 = (-a) + a = (-a) + (-(-a)) = 0$$

pela lei do cancelamento

$$a = -(-a) \quad \checkmark$$

Dizer que $-a = (-1)a$

é um teorema,
que deve ser provado
a partir dos axiomas

o oposto de a é igual ao oposto da identidade vezes a .

Mostrando que $(-1)a = -a$:

$$a + (-1)a =$$

→ Axioma 9:

$$1a + (-1)a =$$

→ Distributiva: (Ax. 7)

$$(1 + (-1))a =$$

$$0 \text{ posto em } 1: (10)$$

$$0a.$$

Se $0a = 0$, então $(-1)a = -a$.

é necessário provar que $0a = 0$.

Esp. vetoriais:

$$0u = 0$$

teorema provado a partir dos axiomas.

$$0 = (1 + (-1)) \quad (\text{Ax 10 do corpo})$$

$$0u = (1 + (-1))u$$

$$u + (-1)u = (\text{Ax 8}) \text{ do esp}$$

Mostrar que $(-1)u = -u$ para usar
axioma 6
esp. vet.

Se $u \in \mathbb{R}^2$: caso particular.
provado apenas para $\mathbb{R}^2$

$$u = (x, y)$$

$$(-1)u = (\underbrace{-1}_\text{mult. escalar} x, \underbrace{-1}_\text{mult. escalar} y) = (-x, -y)$$

$$\begin{aligned} u + (-1)u &= (x, y) + (-x, -y) \\ &= (x - x, y - y) \\ &= (0, 0) = 0. \end{aligned}$$

2. Mostre, demonstrando a validade dos 11 axiomas de corpo, que o conjunto de pares ordenados de números reais $\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ é um corpo, se considerarmos as seguintes operações:

Adição $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Multiplicação $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$\rightarrow (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)$

$a(bc) = (ab)c$

$z = a + bi \Rightarrow (a, b)$

$(x_1, y_1) [(x_2, y_2)(x_3, y_3)] =$

$(x_1, y_1) \left(\underbrace{x_2 x_3 - y_2 y_3}_{x_4}, \underbrace{x_2 y_3 + x_3 y_2}_{y_4} \right) =$

$(x_1 x_4 - y_1 y_4, x_1 y_4 + x_4 y_1)$

$(x_1(x_2 x_3 - y_2 y_3) - y_1(x_2 y_3 + x_3 y_2),$

$x_1(x_2 y_3 + x_3 y_2) + (x_2 x_3 - y_2 y_3)y_1)$

$(x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3 - y_1 x_3 y_2,$

$x_1 x_2 y_3 + x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1 - y_2 y_3 y_1)$

$(x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3 - y_1 x_3 y_2,$

$x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 y_3)$

$[(x_1, y_1)(x_2, y_2)](x_3, y_3) =$

$$\left(\underbrace{x_1 x_2 - \gamma_1 \gamma_2}_{x_5}, \underbrace{x_1 \gamma_2 + x_2 \gamma_1}_{\gamma_5} \right) (x_3, \gamma_3) =$$

$$(x_5 x_3 - \gamma_5 \gamma_3, x_5 \gamma_3 + x_3 \gamma_5) =$$

$$\left((x_1 x_2 - \gamma_1 \gamma_2) x_3 - (x_1 \gamma_2 + x_2 \gamma_1) \gamma_3, \right. \\ \left. (x_1 x_2 - \gamma_1 \gamma_2) \gamma_3 + x_3 (x_1 \gamma_2 + x_2 \gamma_1) \right)$$

$$\left(x_1 x_2 x_3 - \gamma_1 \gamma_2 x_3 - x_1 \gamma_2 \gamma_3 - x_2 \gamma_1 \gamma_3, \right. \\ \left. x_1 x_2 \gamma_3 - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + x_3 x_1 \gamma_2 + x_3 x_2 \gamma_1 \right)$$

$$\left(\cancel{x_1 x_2 x_3} - \cancel{\gamma_1 \gamma_2 x_3} - \cancel{x_1 \gamma_2 \gamma_3} - \cancel{\gamma_1 x_2 \gamma_3}, \right. \\ \left. \cancel{x_1 x_2 \gamma_3} - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + \cancel{x_1 \gamma_2 x_3} + \cancel{\gamma_1 x_2 x_3} \right) \\ (a b) c$$

$$\left(\cancel{x_1 x_2 x_3} - \cancel{x_1 \gamma_2 \gamma_3} - \cancel{\gamma_1 x_2 \gamma_3} - \cancel{\gamma_1 x_3 \gamma_2}, \right. \\ \left. \cancel{x_1 x_2 \gamma_3} + \cancel{x_1 \gamma_2 x_3} + \cancel{\gamma_1 x_2 x_3} - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \right) \\ a (b c)$$

