1. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + y, x - y)$.
   (a) Escreva a matriz $[T]$ desse operador em relação à base canônica.
   (b) Escreva $p_T(\lambda) = \det([T] - \lambda \mathbb{1})$, o polinômio característico de T. Qual o grau desse polinômio, na variável λ?
   (c) Obtenha as raízes de $p_T(\lambda)$, os autovalores de T. Qual a multiplicidade algébrica de cada raiz?
   (d) Para cada autovalor λ obtido no item anterior, encontre um conjunto L.I. de autovetores $\boldsymbol{v}$ associados a λ pela equação $T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$.
   (e) Quantos autovetores L.I. estão associados a cada autovalor? Essa é a *multiplicidade geométrica* do autovalor. Compare com a multiplicidade algébrica.
   (f) O conjunto B de autovetores que você encontrou forma uma base de $\mathbb{R}^2$? Se sim, escreva a matriz mudança de base de B para a base canônica: $[\mathbb{I}]^B_C$.
   (g) Se B for base, escreva $[T]_B$, a matriz de T na base B.

a) $T(1,0) = (1,1)$
$T(0,1) = (1,-1)$ $\Rightarrow$ $[T]_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ //

b) $p_T(\lambda) = \det([T] - \lambda I)$

$= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right)$

$= [(1-\lambda)(-1-\lambda) - 1]$

$\lambda^2 - 1^2 - 1$

λ λ: letra grega LAMBDA (lamda)

$p_T(\lambda) = \lambda^2 - 2$ polinômio característico.

grau: 2

(c) Obtenha as raízes de $p_T(\lambda)$, os autovalores de T. Qual a multiplicidade algébrica de cada raiz?

$p_T(\lambda) = 0$

$\lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 2 \Rightarrow$ $\lambda^2 - 2 = (\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})$

$\lambda = \pm\sqrt{2}$

$\begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{2} & \text{multiplicidade algébrica} = 1 \\ \lambda_2 = -\sqrt{2} & \text{multiplicidade algébrica} = 1 \end{cases}$

(d) Para cada autovalor λ obtido no item anterior, encontre um conjunto L.I. de autovetores $\boldsymbol{v}$ associados a λ pela equação $T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$.

Para $\lambda = \sqrt{2}$:

$$T(v) = \lambda v$$

$$T(x,y) = \lambda (x,y)$$

$T(x, y) = (x + y, x - y)$.

$$(x+y, x-y) = \sqrt{2}(x,y)$$

$$\begin{cases} x+y = \sqrt{2}\,x \\ x-y = \sqrt{2}\,y \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ x - (1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases}}$$

$$x = 1+\sqrt{2}\,y \iff (1-\sqrt{2})x = -y$$

$\{v_1 = (1+\sqrt{2}, 1)\}$ conj. L.I. de autovetores de T com autovalor λ=√2

Para $\lambda = -\sqrt{2}$

$$\begin{cases} x+y = -\sqrt{2}\,x \\ x-y = -\sqrt{2}\,y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y = 0 \\ x - (1-\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$$

$$x = 1-\sqrt{2}\,y$$

$\{v_2 = (1-\sqrt{2}, 1)\}$ conj. L.I de autovetores associados ao autovalor λ = -√2

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{2} \Rightarrow \{v_1 = (1+\sqrt{2}, 1)\} \\ \lambda_2 = -\sqrt{2} \Rightarrow \{v_2 = (1-\sqrt{2}, 1)\} \end{cases}$$

multiplicidade geométrica = 1

multiplicidade geométrica = 1

(e) Quantos autovetores L.I. estão associados a cada autovalor? Essa é a *multiplicidade geométrica* do autovalor. Compare com a multiplicidade algébrica.

(f) O conjunto B de autovetores que você encontrou forma uma base de $\mathbb{R}^2$? Se sim, escreva a matriz mudança de base de B para a base canônica: $[\mathbb{I}]_C^B$.

$$B = \{ v_1 = (1+\sqrt{2}, 1), v_2 = (1-\sqrt{2}, 1) \}$$

$\{v_1, v_2\}$ é L.I., com 2 elementos

base de $\mathbb{R}^2$

$$P = [I]_C^B = \begin{bmatrix} [v_1]_C & [v_2]_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} //$$

(g) Se B for base, escreva $[T]_B$, a matriz de T na base B.

$$[T]_B = [I]_B^C [T]_C [I]_C^B = P^{-1}[T]P$$

$$D = P^{-1} A P \leftarrow$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \\ & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Manualmente: $B = \{ \underset{v_1}{(1+\sqrt{2}, 1)}, \underset{v_2}{(1-\sqrt{2}, 1)} \}$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} [T(v_1)]_B & [T(v_2)]_B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [\lambda_1 v_1]_B & [\lambda_2 v_2]_B \end{bmatrix} \qquad [v_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} //$$

Exemplo:

$$\rightarrow A(v) = \lambda v$$

Equação de autovetores
Equação de autovalores

v é autovetor de A com autovalor λ

Seja F: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operador linear

F(x,y,z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z)

Verifique quais dos vetores abaixo são autovetores de F e obtenha o respectivo autovalor

a) (1, 1, 0)
b) (0, 1, 1)
c) (2, 3, 4)
d) (1, 1, 2)

a) $F(v) = \lambda v$

$$F(1,1,0) = (1-3,\ 3-5,\ 6-6+0)$$
$$= (-2,\ -2,\ 0)$$
$$= -2(1,1,0)$$

portanto, (1,1,0) é autovetor de F com autovalor -2

b) $(0,1,1)$

F(x,y,z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z)

$$F(0,1,1) = (-3+3,\ -5+3,\ -6+4)$$
$$= (0,\ -2,\ -2)$$
$$= -2(0,1,1)$$

(0, 1, 1) é autovetor de F com autovalor -2

$\{(1,1,0), (0,1,1)\}$ é gerador de um subespaço de autovetores de F com autovalor λ=-2

$\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1)$ é autovetor de F com autovalor λ=-2

F(x,y,z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z)

c) $(2,3,4)$ $\qquad F(v) = \lambda v$

$$F(2,3,4) = (2 - 9 + 12,\ 6 - 15 + 12,\ 12 - 18 + 16)$$
$$= (5,\ 9,\ 10) \neq \lambda(2,3,4)$$

(2, 3, 4) não é autovetor de F.

d) $(1,1,2)$

$$F(1,1,2) = (1 - 3 + 6,\ 3 - 5 + 6,\ 6 - 6 + 8)$$
$$= (4,\ 4,\ 8) = 4(1,1,2)$$

(1,1,2) é autovetor de F com autovalor λ=4

Multiplicidade geométrica = 1
Porque a multi. algébrica de λ=4 é 1.

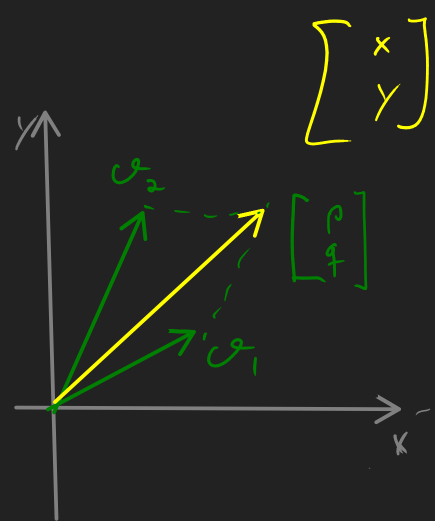
VOTAÇÃO

1) Resolver exemplo relativo à aula 20 (terça)
2) Resolver exemplo relativo à aula 21 (quinta)

EXEMPLO aula 21: DIAGONALIZAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ACOPLADAS

Obtenha a solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \dot{X} = A X$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

diagonalizar a matriz:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(1-\lambda) + 2$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda - \lambda + 4 + 2$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Existe uma base em que a matriz do sistema é diagonal e dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dp}{dt} = 3p \\ \frac{dq}{dt} = 2q \end{cases}$$

matriz mudança de base:

$$[I]^B_C = \left[[v_1]_C \quad [v_2]_C \right]$$

P/ $\lambda_1 = 3$ $\quad A v_1 = 3 v_1$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x - y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{cases} = \begin{cases} x - y = 0 \Rightarrow x = y \end{cases}$$

$$v_1 = (1,1)$$

P/ $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x - y = 2x \\ 2x + y = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \Rightarrow 2x = y \end{cases}$$

$$v_2 = (1,2)$$

Base $\quad B = \{ \underbrace{(1,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,2)}_{v_2} \}$.

Matriz mudança de base:

$$[I]_C^B = \begin{bmatrix} [v_1]_C & [v_2]_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C = [I]_C^B \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}_B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}.$$

//

Resolver o sistema na base B:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = 3p \\ \dfrac{dq}{dt} = 2q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = 3p \\ \dfrac{dq}{dt} = 2q \end{cases}$$

$$\frac{dp}{dt} = 3p \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} p = 3p$$

Operador diferencial D = d/dt, que age no espaço das funções:

$$D(p) = 3p$$

p é autovetor de D com autovalor 3.

$p = e^{3t}$ pois $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d}{dt}(e^{3t}) = 3[e^{3t}]$

$p(t) = a e^{3t}$ é solução.

$$\frac{dq}{dt} = 2q \quad \Rightarrow \quad q(t) = b e^{2t}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} a e^{3t} \\ b e^{2t} \end{bmatrix}_B.$$

é solução do sistema na base B.

Na base canônica:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\, e^{3t} \\ b\, e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a e^{3t} + b e^{2t} \\ a e^{3t} + 2b e^{2t} \end{bmatrix}$$

Família de soluções

$$\begin{cases} x(t) = a\, e^{3t} + b\, e^{2t} \\ y(t) = a\, e^{3t} + 2b\, e^{2t} \end{cases} \quad \text{para } a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[a e^{3t} + b e^{2t}\right]$$

$$= 3a e^{3t} + 2b e^{2t} \;//$$

!

$$4x - y = 4\left[a e^{3t} + b e^{2t}\right] - \left[a e^{3t} + 2b e^{2t}\right]$$

$$= 3a e^{3t} + 2b e^{2t} \;//$$

Condição inicial

$$X(t=0) = X_0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0 \end{array} \right.$$
$$Y(t=0) = Y_0$$

Caso $\begin{cases} X(t=0) = X_0 \\ Y(t=0) = Y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = X_0 \\ a + 2b = Y_0 \end{cases}$ fixa a, b.

$$\begin{cases} X(t) = a\,e^{3t} + b\,e^{2t} \\ Y(t) = a\,e^{3t} + 2b\,e^{2t} \end{cases} = \begin{cases} X(0) = a\,e^{0} + b\,e^{0} \\ Y(0) = a\,e^{0} + 2b\,e^{0} \end{cases}$$