

3. Para cada forma quadrática da questão anterior, execute os seguintes passos:

- Obtenha os autovalores e respectivos autovetores da matriz da forma quadrática.
- Escreva a matriz diagonal, formada pelos autovalores.
- Verifique que os autovetores são ortogonais (considerando o produto interno usual)
- Normalize os autovetores e escreva a base ortonormal B de autovetores em que a forma quadrática é diagonal.
- Escreva a matriz mudança de base $[I]_C^B$, da base diagonal para a base canônica.
- Verifique que $[I]_C^B$ é uma matriz ortogonal ($A^{-1} = A^T$).

$$(a) \quad q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2x_3$$

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4xz - yz$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -1/2 \\ 2 & -1/2 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1/2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ 2 & -1/2 \end{vmatrix}$$

$$(1-\lambda) \left((1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} \right) + \left(-(-1-\lambda) + 2 \right) + 2 \left(\frac{1}{2} - 2(1-\lambda) \right)$$

$$(1-\lambda)^3 - \frac{1}{4}(1-\lambda) - (1-\lambda) - 1 + 1 - 2(1-\lambda)$$

$$(1-\lambda)^3 - \frac{13}{4}(1-\lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 - \frac{13}{4} + \frac{13}{4}\lambda = 0$$

$$-4\lambda^3 + 12\lambda^2 - 12\lambda + 4 - 13 + 13\lambda = 0$$

$$-4\lambda^3 + 12\lambda^2 + \lambda - 11 = 0$$

raízes:

$$\lambda_1 = -1,0697$$

$$\lambda_2 = 0,60753$$

$$\lambda_3 = 3,4622$$

2. Escreva a matriz das formas bilineares simétricas que abaixo:

(a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2x_3$

(b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_2x_3$

(c) $q(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

b) $q(x, y, z) = x^2 - y^2 + 4yz$

$$= A x^2 + B y^2 + C z^2 + D xy + E xz + F yz$$

$$A = 1$$

$$B = -1$$

$$C = 0$$

$$D = 0$$

$$E = 0$$

$$F = 4$$

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_2x_3$$

$$q = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x & -y+2z & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x^2 - y^2 + 2zy + 2yz$$

$$= x^2 - y^2 + 4yz$$

$$(b) \quad q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_2x_3$$

$$c) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Efetue os seguintes passos para cada equação da questão anterior:

(a) Escreva a equação dada na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0,$$

onde Q é uma matriz quadrada simétrica, L é uma matriz de forma linear e F é uma constante escalar.

(b) Obtenha os autovalores e autovetores da matriz da forma quadrática Q .

(c) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

$$A x^2 + B xy + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix}}_L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 1 = 0$$

(b) Obtenha os autovalores e autovetores da matriz da forma quadrática Q .

(c) Obtenha uma base B , *ortonormal*, formada pelos autovetores da matriz Q .

(d) Escreva a matriz mudança de base $M = [I]_C^B$, da base diagonal B para a base canônica C . Note que, conforme item (f) da questão 3, a matriz $M = [I]_C^B$ é uma matriz ortogonal, logo $M^{-1} = M^T$.

↗ Simétrica

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax + B/2 y \\ B/2 x + Cy \end{bmatrix} = x(Ax + B/2 y) + y(B/2 x + Cy) = Ax^2 + \frac{B}{2} xy + \frac{B}{2} yx + Cy^2$$

Polinômio de Taylor de segunda ordem, de várias variáveis

Revisão: polinômio de Taylor, uma variável.

 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função real

derivadas contínuas

 f

derivável, portanto contínua

 f'

derivável, portanto contínua

 $\vdots$ $f^{(n)}$

derivável, portanto contínua

Nas proximidades do ponto (x_0) :

número

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + f'''(x_0) \frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots$$

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

com erro proporcional a $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

Se x_0 é ponto crítico $f'(x_0) = 0$

$$f''(x_0) > 0$$

mínimo local

$$f''(x_0) < 0$$

máximo local

$$f''(x_0) = 0$$

ponto de inflexão

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x-x_0)^2 \rightarrow \text{parabola}$$

Função analítica =>

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Rightarrow \text{simetria}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + F = 0,$$

$$f(x,y) \approx f_0 + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}}_L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$S_c(x_0, y_0)$ é ponto crítico:

$$\vec{\nabla} f = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = 0$$

$$f(x,y) \approx f_0 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Podemos diagonalizar:

$$f(x,y) \approx f_0 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$z = f(x,y) \approx f_0 + \frac{\lambda_1 a^2}{2} + \frac{\lambda_2 b^2}{2}$$

$$\frac{\lambda_1}{2} a^2 + \frac{\lambda_2}{2} b^2 = z - f_0$$

$$\lambda_1 > 0 \text{ e } \lambda_2 > 0 \Rightarrow z \geq f_0$$

parabolóide boca p/cima:
ponto de mínimo local

$$\lambda_1 < 0 \text{ e } \lambda_2 < 0 \Rightarrow z - f_0$$

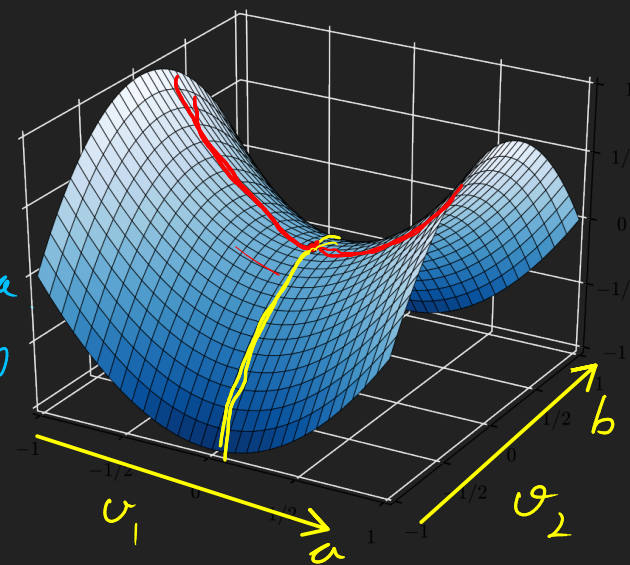
parabolóide boca p/baixo
ponto de máximo local

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$$

parabolóide hiperbólico (sela)

mínimo local na direcção de a
máx. local na direcção de b

$$\frac{\lambda_1}{2} a^2 + \frac{\lambda_2}{2} b^2 = z - f_0$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y &= \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x &= \frac{1}{2}y \end{aligned} \Rightarrow x = y$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1)$$

$$\lambda_2 = -1/2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}y \Rightarrow x = -y$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1)$$

