

Exemplo:

$$\mathbb{Z}_7: \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

DEFINIÇÃO

$$\alpha \oplus \beta = (\alpha + \beta) \bmod 7$$

$$\alpha \odot \beta = (\alpha \beta) \bmod 7$$

$$5 \oplus 6 = (5 + 6) \bmod 7$$

$$= (11) \bmod 7 \quad 7 \text{ primo.}$$

$$5 \oplus 6 = 4$$

$$6 \odot 1 = (6 + 1) \bmod 7$$

$$(7) \bmod 7 = 0$$

$$-6 = 1$$

$$15 \div 7 = 1$$

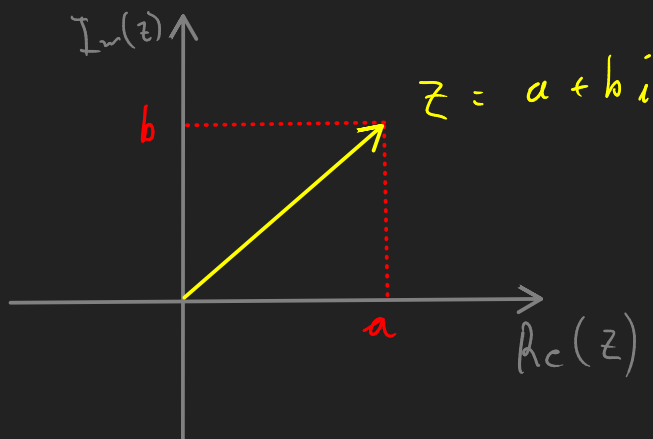
Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$

Tipicamente: subcorpo dos complexos.

 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

EXEMPLO:

7. Mostre que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ com a adição usual e a multiplicação αu usual entre um número real α e um número complexo $u = (a + bi)$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais. Nesta notação a e b são números reais e $i^2 = -1$.



$$\mathbb{C} = \{ (a + bi) \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \}$$

Adição $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$
 $(a + c) + (b + d)i$

DEFINIÇÃO

Multiplicação por escalar:

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

$$\alpha z = \alpha(a + bi) = (\alpha a) + (\alpha b)i$$

1. **Fechamento por adição:** A adição entre dois elementos u e v quaisquer de V resulta em um *único* elemento de V , denotado por $u + v$ e chamado de *soma* de u e v .

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$$

$$(\underbrace{a+c}_{\text{X}}) + (\underbrace{b+d}_{\text{Y}})i \leftarrow z_1 + z_2$$

$$\left(\underbrace{\text{X}}_{\substack{\downarrow \\ \in \mathbb{R}}} + \underbrace{\text{Y}}_{\substack{\downarrow \\ \in \mathbb{R}}} i \right) \in \mathbb{C} \quad \checkmark$$

2. **Fechamento por multiplicação por escalar:** A multiplicação entre um elemento $\alpha \in \mathbb{K}$, denominado *escalar*, e um elemento $u \in V$ resulta em um *único* elemento de V , denotado por $\alpha \cdot u$ (ou αu), chamado *produto* de α e u .

$$\alpha \in \mathbb{C}?$$

$$\alpha z = \alpha(a+bi) = \underbrace{(\alpha a)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(\alpha b)}_{\in \mathbb{R}} i \quad \checkmark$$

3. **Comutatividade da adição:** $u + v = v + u$

4. **Associatividade da adição:** $u + (v + w) = (u + v) + w$

5. **Existência da identidade da adição:** Existe um elemento em V , denotado por 0 e chamado de *vetor nulo* tal que $u + 0 = u$ para todo $u \in V$.

6. **Existência do oposto:** Para cada elemento $u \in V$ existe um elemento, chamado *oposto* de u e denotado por $(-u)$, tal que $u + (-u) = 0$.

Os $\mathbb{C}$ formam um corpo e esses axiomas são idênticos aos axiomas de corpo, logo são satisfeitos

vetor nulo: $0 = 0 + 0i$

oposto de a nos $\mathbb{R}$

unidade imaginária: $i^2 = -1$

oposto de $(a+bi)$ é $(-a) + (-b)i$

7. **Associatividade da multiplicação por escalares:** $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

Letra grega: escalares, no caso números reais

Letra latina: u, v, w , etc: vetores, no caso números complexos,

a, b, c, x, y .. componentes deles, neste caso, reais

$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$$

mult. de vetor por escalar multiplicação entre escalares

$$\alpha(\beta u) = \alpha(\beta(a+bi)) = \alpha[(\beta a) + (\beta b)i]$$

$$= [\alpha(\beta a)] + [\alpha(\beta b)]i$$

multiplicação de números reais.
ASSOCIATIVA.

$$(\alpha\beta)u = (\alpha\beta)(a+bi) = [(\alpha\beta)a] + [(\alpha\beta)b]i$$

LOGO A MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR É ASSOCIATIVA

8. Distributividade da soma de escalares: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

$$(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(a + bi)$$

$$= [\underbrace{(\alpha + \beta)a}] + [(\alpha + \beta)b]i$$

DISTRIBUTIVA DO
CORPO DOS REAIS.

$$= [\alpha a + \beta a] + [\alpha b + \beta b]i //$$

$$\begin{aligned}\alpha u + \beta u &= \alpha(a+bi) + \beta(a+bi) \\ &= (\alpha a) + (\alpha b)i + (\beta a) + (\beta b)i \\ &= [\alpha a + \beta a] + [\alpha b + \beta b]i\end{aligned}$$

LOGO VALE A DISTRIBUTIVA DA ADIÇÃO DE ESCALARES.

9. Distributividade da soma de vetores: $\alpha(u \oplus v) = \alpha u \oplus \alpha v$

$$u = a + bi$$

$$v = c + di$$

$$\alpha(u \oplus v) = \alpha[(a+bi) + (c+di)]$$

$$= \alpha[(a+c) + (b+d)i]$$

$$= \underbrace{\left[\alpha(a+c) \right]}_{\text{MULTIPLICAÇÃO DE REAIS: DISTRIBUTIVA}} + \underbrace{\left[\alpha(b+di) \right]}_{\text{só tem numero real}} i$$

$$\alpha(u+v) = \left[\alpha a + \alpha c \right] + \left[\alpha b + \alpha d \right] i //$$

$$\begin{aligned} \alpha u + \alpha v &= \alpha(a+bi) + \alpha(c+di) \\ &= \left[(\alpha a) + (\alpha b)i \right] + \left[(\alpha c) + (\alpha d)i \right] \end{aligned}$$

$$\left[\alpha a + \alpha c \right] + \left[\alpha b + \alpha d \right] i //$$

Vale a distributiva da adição de vetores.

10. **Unidade:** $1 \cdot u = u$, onde 1 é a unidade do corpo $\mathbb{K}$.

1 elemento neutro da multiplicação no corpo dos reais (escalares)

$$1u = 1(a+bi) = (\underbrace{1a}) + (1b)i$$

uso o fato de
1 ser a identidade dos $\mathbb{R}$

$$= a + bi = u \quad \checkmark$$

Logo os complexos formam um espaço vetorial sobre o corpo dos reais.

O espaço vetorial dos $\mathbb{C}$ sobre o corpo dos $\mathbb{R}$ é ISOMORFO ao $\mathbb{R}^2$

$$z = (a, b) = a + bi$$

O espaço $\mathbb{R}^2$ é isomorfo ao espaço vetorial da geometria plana, logo o espaço vetorial dos complexos sobre os $\mathbb{R}$ é ISOMORFO ao esp. vetorial da geometria plana.

Polinômio: $p(x) = x^2 + 1$

Raízes: $x^2 + 1 = 0$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm i$$

$$p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

tem duas raízes

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

não tem raiz real.