$T: V \to V$ operador linear no espaço vetorial V sobre o corpo dos $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$

Se existe $v \in V$ tal que

$$T(v) = \lambda v \quad , \quad \lambda \text{ escalar}$$

v é AUTOVETOR DE T
λ É O AUTOVALOR ASSOCIADO A v

Note: $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

$$= \alpha \lambda v$$

$$= \lambda (\alpha v)$$

v é auto vetor com autovalor λ, então αv também é.

$$T(v) = \lambda v \qquad \Rightarrow \quad T(v+w) = \lambda(v+w)$$
$$T(w) = \lambda w$$

exercício

Exemplo $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = (x+4y, 2x+3y)$$

Obtenha os autovalores e seus autovetores associados

$[F]$ na base canônica

$$F(1,0) = (1,2) \qquad F(0,1) = (4,3)$$

$$[F(1,0)] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad [F(0,1)] = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

polinômio característico:

$$p_F(\lambda) = \det\left([F] - \lambda \mathbb{1}\right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda) - 8$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 3\lambda + 3 - 8$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda - 5 \qquad \lambda^2 - S\lambda + P$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 + \lambda_2 = 4 \\ \lambda_1 \lambda_2 = -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -1$$

Raízes do polinômio característico: $\lambda = 5$ ou $\lambda = -1$ (autovalores de F)

Autovetores:

$\lambda = 5$:

Equação de autovetores: $F(v) = \lambda v$

Matricial: $\qquad [v] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 4y = 5x \\ 2x + 3y = 5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Sistema homogêneo

$$\{ x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$[v] = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[v] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v = 1(1,0) + 1(0,1) = (1,1)$$

$v_1 = (1,1)$ é autovetor de F com autovalor λ=5

$\lambda = -1$

$$F(v) = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(F - \lambda \mathbb{1})(v) = 0$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + 4y = 0 \\ 2x + (3-\lambda)y = 0 \end{cases} \qquad (\lambda = -1)$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -2y$$

$$[v] = \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$v_2 = (-2, 1)$ é autovetor de F com autovalor λ=-1

$$B = \{ (1,1), (-2,1) \} \rightarrow \text{é Base de } \mathbb{R}^2$$

Linearmente independetes

F possui dois autovalores distintos. dim(ℝ²) = 2, logo existe base de ℝ² formada por autovetores de F

Note: $(1,1)$ autovetor com $\lambda = 5$ $\qquad F(x,y) = (x+4y, 2x+3y)$

$$F(1,1) = (1+4, 2+3) = (5,5) = 5(1,1)$$

$(2,-1)$ autovetor com $\lambda = -1$

$$F(2,-1) = (2+4(-1), 2-3)$$

$$= (2-4, 2-3) = (-2,1) = -1(2,1)$$

$$F(4,5) = (4+4(5), 2(4)+3(5)) = (24, 23) \neq \lambda(4,5)$$

$B = \{(1,1), (2,-1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

matriz de F:

$$F(1,1) = 5(1,1) \Rightarrow [F(1,1)]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

$$F(2,-1) = -1(2,-1) \Rightarrow [F(2,-1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}_B$$

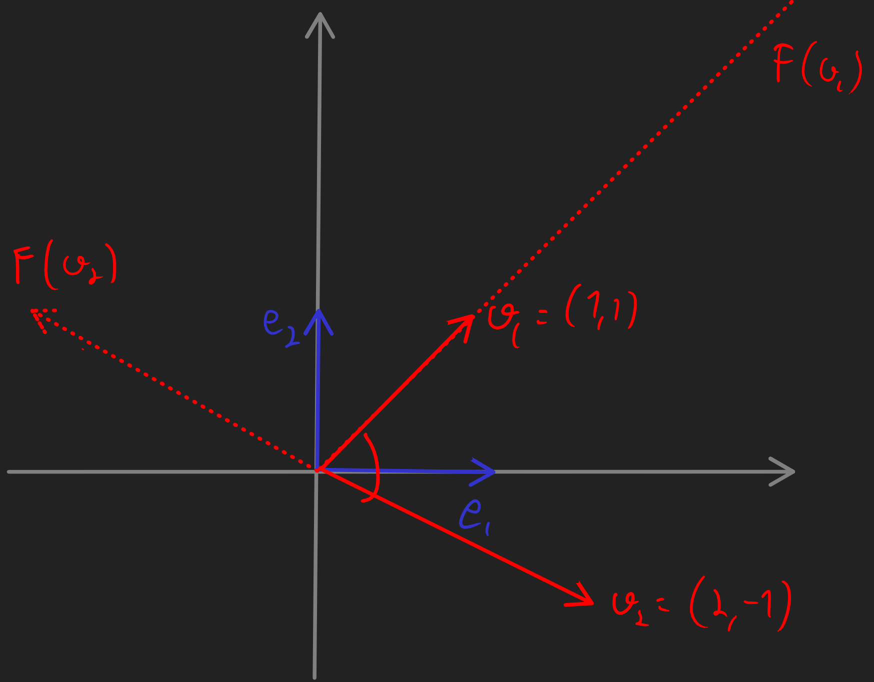
$$[F]_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_B \quad \text{diagonal!}$$

$$[F(1,1)]_B = [F]_B [(1,1)]_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}_B.$$

F é diagonalizável se e somente se
existir uma base do esp. vetorial formada por autovetores de F

Matriz mudança de base de B para a base canônica

$$[I]_C^B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} [v_1] & [v_2] \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$[F]_C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad [F]_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[F(v)]_C = [F]_C [v]_C}$$

$$[F(v)]_B = [F]_B \, [v]_B$$

$$[F]_B \Rightarrow [F(v)]_B = [F]_B \, [I]^C_B [v]_C$$

$$\left(\overbrace{[I]^C_B [F(v)]_C}^{[F(v)]_B}\right) = [F]_B [I]^C_B [v]_C$$

$$[F(v)]_C = \underbrace{\left([I]^C_B\right)^{-1} [F]_B [I]^C_B}_{[F]_C} [v]_C$$

$$[F(v)]_C = [F]_C \, [v]_C$$

$$[F]_C = \left([I]^C_B\right)^{-1} [F]_B [I]^C_B$$

diag

$[F]_C = A$ $\qquad$ $A = \left([I]^C_B\right)^{-1} D \, [I]^C_B$

$[F]_B = D$ $\qquad$ $[I]^C_B A \left([I]^C_B\right)^{-1} = D$

$[I]^B_C = \left([I]^C_B\right)^{-1}$ $\qquad$ $\left([I]^B_C\right)^{-1} A \, [I]^B_C = D$

$[I]^B_C = P$

Mudabnça de base de matriz de transformação

$$P^{-1} A P = D.$$

P: matriz de autovetores:

$$B = \{(1,1), (2,-1)\}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [I]_C^B$$

Se B for ortonormal, P é ortogonal e $P^{-1} = P^T$

Exemplo:

$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$G(x, y) = (5x - y, x + 3y)$

$$[G] = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

pol. característico:

$$p_G(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(3-\lambda) + 1$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda - 5\lambda + 15 + 1$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$x^2 - 2ax + a^2$

$(x-4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 4$ raiz dupla

multi. algébrica

$V(\lambda = 4)$ pode ter dimensão ≤ 2

multiplicidade geométrica

$\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x - y = 4x \\ x + 3y = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

$v_1 = x(1,1)$ dim $V(\lambda=1)$ é 1

$v = (1,1)$ é autovetor de G.

G não é diagonalizável

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$[T] = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Obtenha os autovalores e os autovetores de T

Polinômio Característico

$C_2 \leftarrow C_2 - C_3$

$$p_T(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -6 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & -2+\lambda & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

cofatores

$$= (2-\lambda)\, 1 \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(5-\lambda)(-2-\lambda)+12\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[\lambda^2-5\lambda+2\lambda-10+12\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[\lambda^2-3\lambda+2\right]$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$$= -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

Raízes: $\lambda = 1$ raiz simples

$\lambda = 2$ raiz dupla.

Auto vetores:

$\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x - 6y - 6z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{4}L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{4}L_1} \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

Exercício

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y \\ -y \\ 3y \end{bmatrix}$$

$v = (3, -1, 3)$ é auto vetor.

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+6-18 \\ -3-4+6 \\ 9+6-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$ ✓

Para $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{-6} & \cancel{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - 6y - 6z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \qquad (x\ -3)$$

$$\rightarrow x - 2y - 2z = 0$$

$$x = 2y + 2z$$

2 variáveis livres.

$$v = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2 vetores L.I.

$B = \{ \underset{\lambda=1}{(3,-1,3)}, \underset{\lambda=2}{(2,1,0)}, \underset{\lambda=3}{(2,0,1)} \}$ base de $\mathbb{R}^3$,

Logo T é diagonalizável!

Nessa base:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = [I]_C^B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$