

REVISÃO E DÚVIDAS

Lista 3.1 questão 2

2. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x - y + \frac{3}{2}z, y, \frac{3}{2}x - y + \frac{1}{2}z \right)$.

(d) Para cada autovalor λ obtido no item anterior, encontre um conjunto L.I. de autovetores v associados a λ pela equação $T(v) = \lambda v$.

(e) Quantos autovetores L.I. estão associados a cada autovalor? Essa é a *multiplicidade geométrica* do autovalor. Compare com a multiplicidade algébrica.

(f) O conjunto B de autovetores que você encontrou forma uma base de $\mathbb{R}^3$? Se sim, escreva a matriz mudança de base de B para a base canônica: $[I]_C^B$.

(g) Se B for base, escreva $[T]_B$, a matriz de T na base B .

Sei: $[T] = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow [T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

$\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{matrix} \right\}$ raízes

$p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$

$p_T(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda_1)^2}_{L_1, \lambda_1 \text{ raiz dupla de } p(\lambda)} (\lambda - \lambda_3)$

$\lambda_1 \Rightarrow T(v_1) = \lambda_1 v_1$

$S_{\lambda_1} = \{v_1\}$ subespaço de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \dim(S_{\lambda_1})$ é a multiplicidade geométrica de λ_1

$\hookrightarrow$ encontrar uma BASE para este subespaço (conjunto mínimo de vetores L.I.)

1, 2 ou 3 elementos.

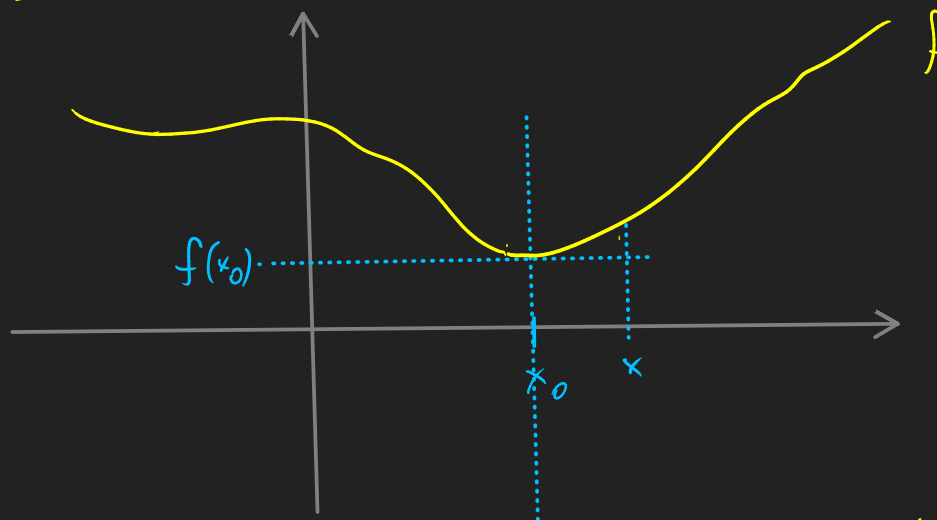
λ_2, λ_3

1) Obtenha uma base em que a forma quadrática abaixo seja escrita como soma de quadrados

$$q(x, y) = x^2 - 10xy + y^2$$

Parênteses: série de Taylor

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função nos reais.

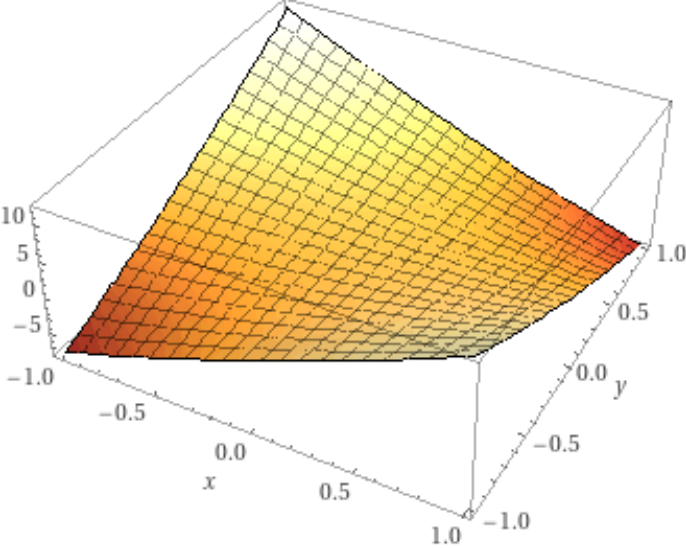


$$f(x) = \underbrace{f(x_0)} + \underbrace{f'(x_0)}_{\text{red arrow to 0}} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots$$

Se x_0 for ponto de mínimo local de f ?

$$f(x) \approx f(x_0) + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2}_{\text{quadrático.}}$$

quadrático.



a quadrática abaixo seja escrita como

R : forma

escolher

Escolho simétrico

$$q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

simétrica
diagonalizável
em base ortonormal

$$q(a, b) = \lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2$$

$$[q] = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q(x, y) = x^2 - 10xy + y^2$$

Diagonalizar [q]

$$P_q(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -5 \\ -5 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right)$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda) - 25$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 25$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 24$$

$$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -4$$

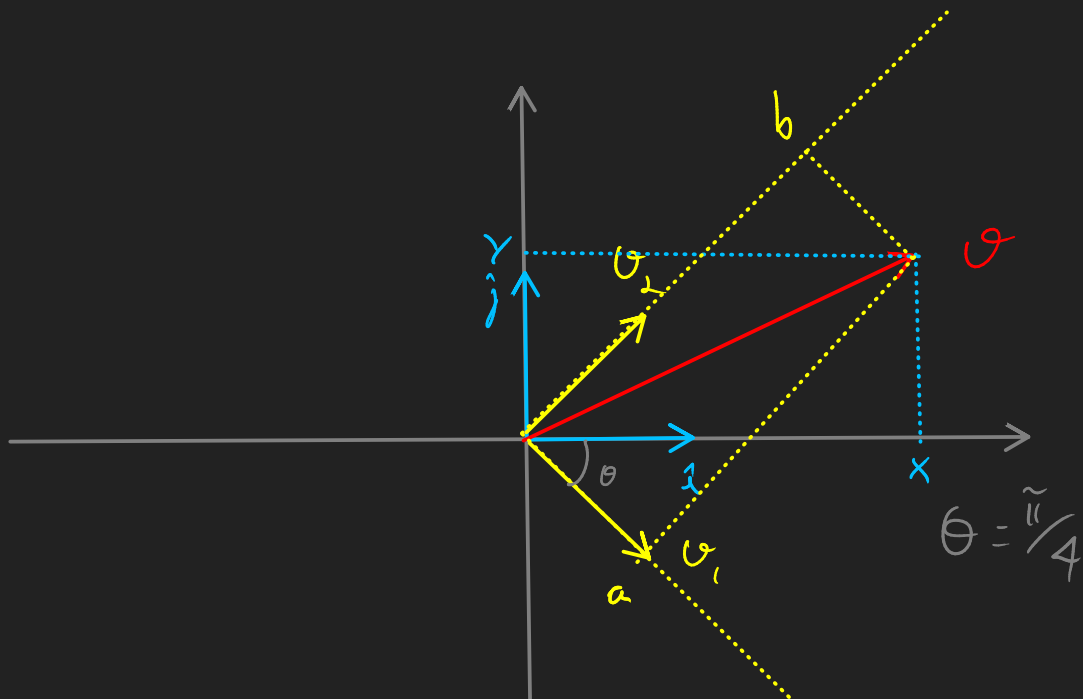
$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = -24 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$B = \left\{ v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1), v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1) \right\}$$

Neußer base:

$$[q]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Se } [v]_C = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow [v]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$



$$q(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$q(a, b) = 6a^2 - 4b^2$$

$$q(x, y) = q(a, b)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [I]_C^B \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$[I]_C^B = \begin{bmatrix} [e_1]_C & [e_2]_C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b) \end{cases}$$

$$[I]_B^C = \left([I]_C^B \right)^{-1} = \left([I]_C^B \right)^T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)^T$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - y) \\ b = \frac{1}{\sqrt{2}} (x + y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} q(a, b) &= 6a^2 - 4b^2 \\ &= 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (x - y) \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (x + y) \right)^2 \\ &= \frac{6}{2} (x - y)^2 - \frac{4}{2} (x + y)^2 \\ &= 3(x^2 - 2xy + y^2) - 2(x^2 + 2xy + y^2) \end{aligned}$$

$$q(x, y) = x^2 - 10xy + y^2$$

Exercício: VERIFIQUE que $v_1 \perp v_2$

Qual a curva descrita pela equação $q(x, y) = 1$?

$$\begin{aligned} q(x, y) &= 1 \\ x^2 - 10xy + y^2 &= 1 \quad (\Leftrightarrow) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(a, b) &= 1 \\ 6a^2 - 4b^2 &= 1 \end{aligned}$$

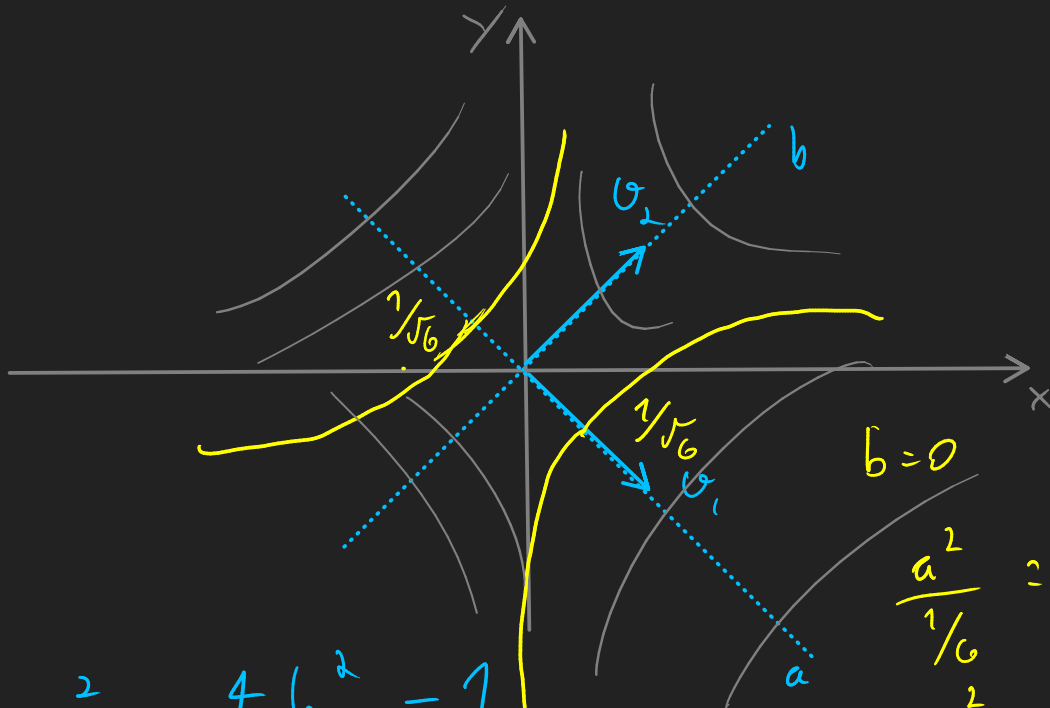
Qual a curva descrita pela equação $q(x,y) = 1$?

$$q(x,y) = 1$$

$$x^2 - 10xy + y^2 = 1 \quad (\Rightarrow)$$

$$q(a,b) = 1$$

$$6a^2 - 4b^2 = 1$$



$$6a^2 - 4b^2 = 1$$

$$\frac{a^2}{(1/6)} - \frac{b^2}{(1/4)} = 1$$

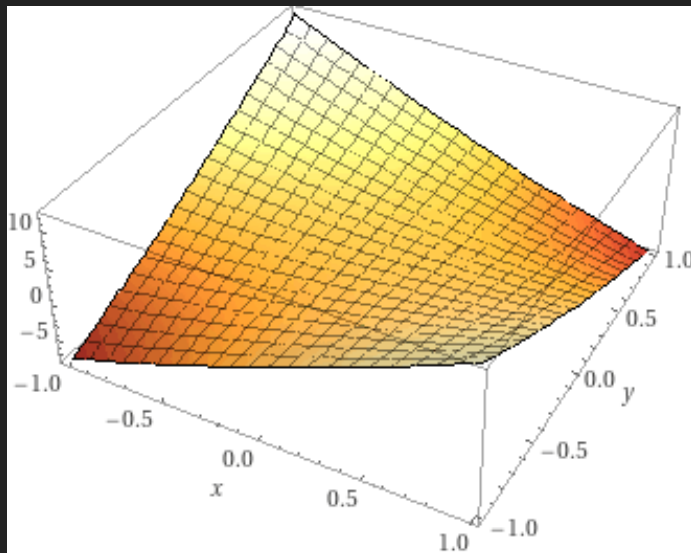
$$b=0$$

$$\frac{a^2}{1/6} = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{6}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

hipérbole



$$x^2 - 10xy + y^2$$

